



Луцькянєнко В. М.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. Петра Василенко

УДК 631. 362

## СПОСОБ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЕЗОТРЫВНОГО ДВИЖЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

*В настоящей работе предложен способ численного решения системы кинематических уравнений, описывающих безотрывное движение изолированного твёрдого тела эллипсоидной формы по наклонной вибрирующей поверхности.*

*This work contained the method to numeral decision of the system kinematics equalizations for describing isolate motion of the ellipsoid form solid on a sloping vibrating surface.*

При создании и совершенствовании современных образцов сельскохозяйственной техники, в частности виброочистительных машин, важное место занимают вопросы математического моделирования рабочих процессов и проведения численного эксперимента. Однако, разработка и использование таких численных экспериментальных установок связана с рядом трудностей. Для повышения адекватности математического описания исследуемых процессов необходимо повышать размерность (степень детализации) математических моделей, что ведёт к нелинейному возрастанию трудоёмкости используемых численных процедур и возрастанию времени счёта до таких значений, которые неприемлемы на практике.

Отсюда, при разработке математических моделей и алгоритмов программ, которые данные модели реализуют на ЭВМ, необходим компромисс между уровнем детализации модели рабочего процесса и способом его численной реализации на ЭВМ. На практике в качестве такого компромисса часто используют процедуры линеаризации (упрощения) исходной математической модели, например, её пошагового решения.

Данная статья посвящена одному из способов линеаризации математической модели движения твёрдого тела эллипсоидной формы по наклонной вибрирующей поверхности. Данная модель используется для описания процессов очистки семян в виброочистительных машинах на режимах безотрывного движения семян в монослое.

В качестве математической модели, описывающей безотрывное движение изолированного тела по наклонной вибрирующей поверхности, используется кинематическая модель движения твёрдого тела по шероховатой поверхности с качением и проскальзыванием под действием сил гравитации и реакции опоры [1]. Опора (рабочая поверхность) совершает периодические колебания, сообщая телу необходимое количество движения.

Форма твёрдого тела, движение которого рассматривается, задаётся в виде эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ . При этом, для приведения неголономных кинематических связей рассматриваемого тела с рабочей поверхностью к голономным связям, поверхность тела разбивается на дискретные участки контакта. Каждый дискретный участок контакта на поверхности эллипсоида приводится к единственной контактной точке (Рис. 1.).

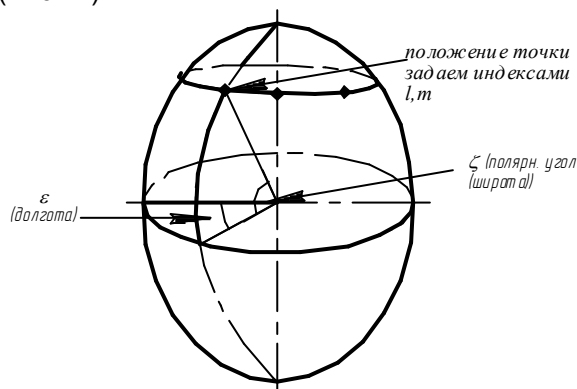
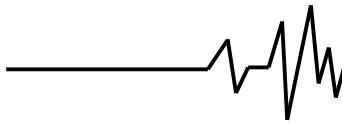


Рис. 1. Задание формы тела с помощью дискретных точек контакта



Каждая установленная контактная точка, принадлежащая поверхности тела (эллипсоиду), нумеруется с помощью индексов  $l$  и  $m$ , где индекс  $l$  определяет номер меридиана и дискретно меняющееся значение угла долготы  $\xi$ , а индекс  $m$  - номер параллели и дискретно меняющееся значение угла широты  $\zeta$  в полярной системе координат тела. Между индексами  $l$ ,  $m$  и значениями углов  $\zeta$ ,  $\xi$  существуют соотношения

$$l = 1 + \frac{\xi}{\Delta\xi}, \quad \xi \in [-90^\circ; 90^\circ], \quad (1)$$

$$m = 1 + \frac{\zeta}{\Delta\zeta}, \quad \zeta \in [0^\circ; 360^\circ], \quad (2)$$

где  $\Delta\xi, \Delta\zeta$  - величины шагов разбивки интервалов изменения углов широты и долготы, соответственно.

Приложение усилий к телу со стороны рабочей поверхности происходит только в установленных дискретных точках контакта. При этом точка контакта, через которую осуществляется взаимодействие тела с рабочей поверхностью в рассматриваемый момент времени, служит мгновенным центром вращения тела (Рис. 2.).

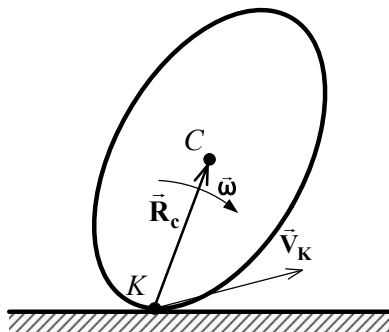


Рис. 2. Кинематическая модель движения тела по рабочей поверхности

Движение тела относительно рабочей поверхности рассматривается как суперпозиция движений вращения тела относительно точки контакта  $K$  и поступательного перемещения мгновенного центра.

Вращение тела характеризуется величиной угловой скорости  $\vec{\omega}$ , с которой меняется направление радиус-вектора  $\vec{R}_c$  в системе координат, связанной с рабочей поверхностью. Поступательное перемещение характеризуется величиной вектора скорости  $\vec{V}_k$  в инерциальной (неподвижной) системе

координат. Поступательное движение тела обусловлено периодическими колебаниями рабочей поверхности, которые передаются телу через точку контакта.

Для вычисления кинематических параметров движения тела рассматриваются три системы координат (Рис. 3.):

- собственная система координат  $CXYZ'$ , связанная с телом и имеющая начало в его центре массы. Для удобства принято, что оси  $CX'$ ,  $CY'$  и  $CZ'$  должны совпадать с главными осями инерции рассматриваемого тела;

- система координат  $K_0XYZ$ , связанная с рабочей поверхностью и имеющая начало в точке  $K_0$ , которая является точкой подачи зерна на рабочую поверхность;

- инерциальная (неподвижная) система координат  $OX_nY_nZ_n$ .

Рабочая поверхность наклонена по отношению к инерциальной системе координат в двух плоскостях. Наклон задаётся двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Угол  $\alpha$  характеризует наклон продольной оси рабочей поверхности к плоскости горизонта. Угол  $\beta$  характеризует наклон поперечной оси рабочей поверхности к плоскости горизонта.

Положение рабочей поверхности относительно инерциальной системы координат  $OX_nY_nZ_n$  задаётся радиус-вектором  $\vec{r}_{вб}$ , который определяет местоположение точки  $K_0$ . Производная  $\dot{\vec{r}}_{вб}$  характеризует гармонические колебания, которые совершает рабочая поверхность под действием генератора вибрации.

Радиус-вектор  $\vec{r}_{вб}$  задаёт местоположение точки контакта тела с рабочей поверхностью относительно начала системы координат  $K_0XYZ$ , которая связана с рабочей поверхностью. Производная  $\dot{\vec{r}}_{вб}$  характеризует движение проскальзывания тела относительно рабочей поверхности.

Местоположение точки контакта относительно начала инерциальной системы координат задаёт радиус-вектор  $\vec{R}_k$ .

Производная радиус-вектора  $\dot{\vec{R}}_k$  характеризует движение тела относительно инерциальной (неподвижной) системы координат.

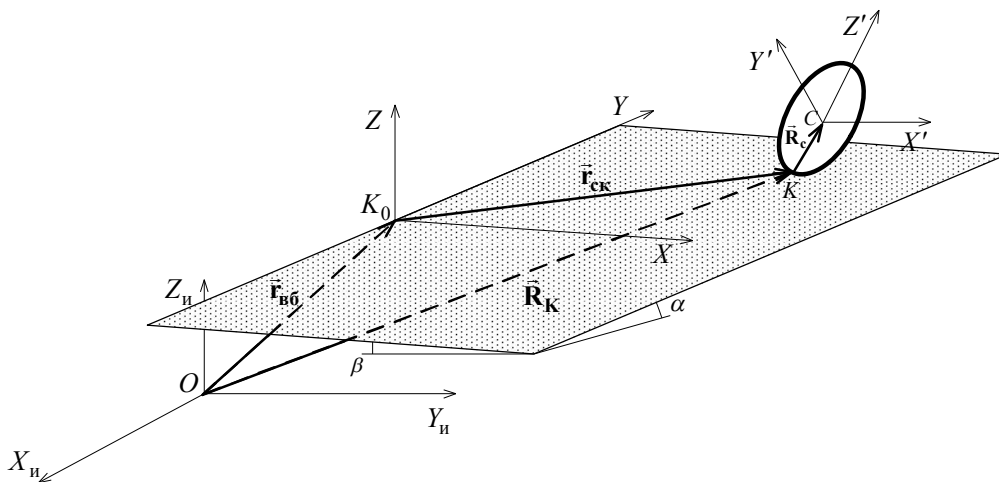
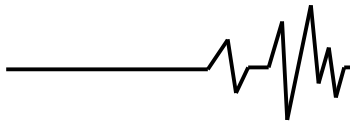


Рис. 3. Принятые системы координат для расчёта кинематических параметров движения тела

Местоположение центра массы тела относительно точки его контакта с рабочей поверхностью задаёт радиус-вектор  $\vec{R}_C$ .

Известно, что кинематические параметры движения любого тела могут быть определены на основании решения системы уравнений, описывающих изменение количества движения и момента количества движения в выбранной системе координат:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}_и}{dt} = \vec{F}, \\ \frac{d\vec{H}_и}{dt} = \vec{M}_и, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\vec{L}_и$  - количество движения тела в принятой инерциальной системе координат;

$\vec{H}_и$  - момент количества движения тела в инерциальной системе координат;

$\vec{F}$  - равнодействующая внешних сил, приложенных к рассматриваемому телу;

$\vec{M}_и$  - равнодействующий момент от внешних сил, приложенных к телу, который вычисляется относительно начала инерциальной системы координат.

Для введённой системы координат, для тела, движущегося без отрыва по вибрирующей рабочей поверхности, система уравнений (3) приобретёт следующий вид.

Учитывая, что количество движения тела в инерциальной (неподвижной) системе координат может быть вычислено с помощью выражения

$$\vec{L}_и = m(\dot{\vec{r}}_{вб} + \dot{\vec{r}}_{ck} + \vec{\omega} \times \vec{R}_C), \quad (4)$$

где  $m$  - масса тела; кинетический момент – с помощью выражения

$$\vec{H}_и = (\vec{R}_K + \vec{R}_C) \times m(\dot{\vec{R}}_K + \vec{\omega} \times \vec{R}_C) + \vec{H}_C, \quad (5)$$

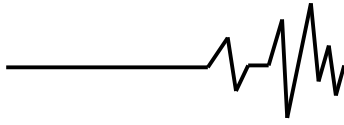
где  $\vec{H}_C$  - кинетический момент тела относительно его центра массы, система уравнений (3), записанная в проекциях на оси системы координат, связанной с рабочей поверхностью, примет вид:

$$\begin{aligned} m \frac{d\omega_y}{dt} R_{Cz} - m \frac{d\omega_z}{dt} R_{Cy} + m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) \omega_x - \\ - m\omega^2 R_{Cx} + m\ddot{x}_{ck} + m\ddot{r}_{вб,x} = G_x - N \cdot f \frac{\dot{x}_{ck}}{\sqrt{\dot{x}_{ck}^2 + \dot{y}_{ck}^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} m \frac{d\omega_z}{dt} R_{Cx} - m \frac{d\omega_x}{dt} R_{Cz} + m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) \omega_y - \\ - m\omega^2 R_{Cy} + m\ddot{y}_{ck} + m\ddot{r}_{вб,y} = G_y - N \cdot f \frac{\dot{y}_{ck}}{\sqrt{\dot{x}_{ck}^2 + \dot{y}_{ck}^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} mR_C^2 \frac{d\omega_x}{dt} - mR_{Cx} \left( \vec{R}_C \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) + \\ + m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) (R_{Cy} \omega_z - R_{Cz} \omega_y) + H_x - mR_{Cz} \ddot{y}_{ck} +, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} + mR_{Cy} \ddot{r}_{вб,z} - mR_{Cz} \ddot{r}_{вб,y} = R_{Cy} G_z - R_{Cz} G_y + M_{кч,y} \\ mR_C^2 \frac{d\omega_y}{dt} - mR_{Cy} \left( \vec{R}_C \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) + \\ + m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) (R_{Cz} \omega_x - R_{Cx} \omega_z) + H_y + mR_{Cz} \ddot{x}_{ck} +, \\ + mR_{Cz} \ddot{r}_{вб,x} - mR_{Cx} \ddot{r}_{вб,z} = R_{Cz} G_x - R_{Cx} G_z + M_{кч,x} \end{aligned} \quad (9)$$



$$mR_C^2 \frac{d\omega_z}{dt} - mR_{Cz} \left( \vec{R}_C \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) +$$

$$+ m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) (R_{Cx} \omega_y - R_{Cy} \omega_x) + H_z +, \quad (10)$$

$$+ mR_{Cx} \ddot{y}_{ck} - mR_{Cy} \ddot{x}_{ck} + mR_{Cx} \ddot{r}_{вб,y} -$$

$$- mR_{Cy} \ddot{r}_{вб,x} = R_{Cx} G_y - R_{Cy} G_x$$

$$N = m \frac{d\omega_x}{dt} R_{Cy} - m \frac{d\omega_y}{dt} R_{Cx} + m(\vec{\omega} \cdot \vec{R}_C) \omega_z -$$

$$- m\omega^2 R_{Cz} + m\ddot{r}_{вб,z} - G_z \quad (11)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекции вектора угловой скорости вращения тела относительно мгновенного центра вращения  $K$  на оси системы координат, связанной с рабочей поверхностью. Здесь и далее рассматриваются проекции в системе координат рабочей поверхности;

$R_{Cx}, R_{Cy}, R_{Cz}$  - проекции радиус-вектора  $\vec{R}_C$ ;

$\dot{x}_{ck}, \dot{y}_{ck}$  - проекции скорости проскальзывания тела относительно рабочей поверхности;

$\ddot{x}_{ck}, \ddot{y}_{ck}$  - проекции ускорения проскальзывания тела;

$\ddot{r}_{вб,x}, \ddot{r}_{вб,y}, \ddot{r}_{вб,z}$  - проекции ускорения рабочей поверхности при совершении гармонических колебаний под воздействием генератора колебаний;

$G_x, G_y, G_z$  - проекции силы веса, действующего на тело;

$N$  - величина реакции опоры, действующей на тело;

$f$  - коэффициент трения скольжения;

$M_{кч,x}, M_{кч,y}$  - проекции вектора момента сопротивления качения при перекачивании тела по рабочей поверхности;

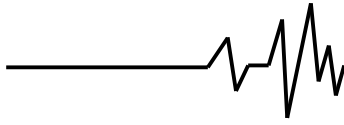
$H_x, H_y, H_z$  - проекции кинетического момента тела.

Проекция угловой скорости вращения тела относительно мгновенного центра вращения  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , входящие в систему уравнений (6)–(11), являются величинами, зависящими от углов поворота осей собственной системы координат тела  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$  относительно системы координат, связанной с рабочей поверхностью, а также от первых и вторых производных данных углов:  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$  [1]. То есть,

для определения параметров движения тела, движущегося по рабочей поверхности с перекачиванием и проскальзыванием, необходимо определить 15 неизвестных параметров, а именно:  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\dot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $r_{ck,x}(t)$ ,  $\dot{r}_{ck,x}(t)$ ,  $\ddot{r}_{ck,x}(t)$ ,  $r_{ck,y}(t)$ ,  $\dot{r}_{ck,y}(t)$ ,  $\ddot{r}_{ck,y}(t)$ .

Исходная система уравнений (6)–(10), которая является системой из 5 неоднородных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, является незамкнутой относительно данного количества неизвестных. В [1] для дополнения системы уравнений (6)–(10) до системы, насчитывающей необходимые 15 уравнений, предлагается проинтегрировать дважды каждое из дифференциальных уравнений (6)–(10). И далее, используя известные численные методы решения нелинейных уравнений, решать полученную систему уравнений относительно перечисленных выше неизвестных. Учитывая, что аналитические выражения для уравнений (6)–(10) после выполнения преобразований по одинарному и двойному интегрированию достаточно громоздки, а также принимая во внимание относительно большую размерность системы уравнений, процедура численного решения системы кинематических уравнений будет иметь достаточно высокую трудоёмкость при её реализации на ЭВМ.

На взгляд автора, для сокращения времени решения (6)–(10), необходимо использовать процедуру линеаризации. Суть данной процедуры состоит в том, что осуществляется пошаговое интегрирование уравнений движения с установленным постоянным шагом продвижения по оси времени  $\Delta t$ . На каждом шаге интегрирования, для момента времени  $t = t_0 + \Delta t \cdot s$ , где  $s$  - индекс выполняемого шага вычислений, определяются значения угловых ускорений  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$  и проекций ускорения проскальзывания  $\ddot{r}_{ck,x}(t)$ ,  $\ddot{r}_{ck,y}(t)$  при условии, что остальные параметры заданы и имеют значения, полученные на предыдущем шаге:  $\theta(t - \Delta t)$ ,  $\psi(t - \Delta t)$ ,  $\varphi(t - \Delta t)$ ,  $\dot{\theta}(t - \Delta t)$ ,  $\dot{\psi}(t - \Delta t)$ ,  $\dot{\varphi}(t - \Delta t)$ ,  $r_{ck,x}(t - \Delta t)$ ,  $r_{ck,y}(t - \Delta t)$ ,  $\dot{r}_{ck,x}(t - \Delta t)$ ,  $\dot{r}_{ck,y}(t - \Delta t)$ . В данном случае уравнения (6)–(10), преобразованные относительно  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$  и  $\ddot{r}_{ck,x}(t)$ ,  $\ddot{r}_{ck,y}(t)$ , примут линейный вид:



$$\begin{cases} \ddot{\theta} \cdot A_{11} + \ddot{\varphi} \cdot A_{12} + \ddot{\psi} \cdot A_{13} + \ddot{x}_{\text{ск}} \cdot A_{14} + \ddot{y}_{\text{ск}} \cdot A_{15} = B_1, \\ \ddot{\theta} \cdot A_{21} + \ddot{\varphi} \cdot A_{22} + \ddot{\psi} \cdot A_{23} + \ddot{x}_{\text{ск}} \cdot A_{24} + \ddot{y}_{\text{ск}} \cdot A_{25} = B_2, \\ \ddot{\theta} \cdot A_{31} + \ddot{\varphi} \cdot A_{32} + \ddot{\psi} \cdot A_{33} + \ddot{x}_{\text{ск}} \cdot A_{34} + \ddot{y}_{\text{ск}} \cdot A_{35} = B_3, \\ \ddot{\theta} \cdot A_{41} + \ddot{\varphi} \cdot A_{42} + \ddot{\psi} \cdot A_{43} + \ddot{x}_{\text{ск}} \cdot A_{44} + \ddot{y}_{\text{ск}} \cdot A_{45} = B_4, \\ \ddot{\theta} \cdot A_{51} + \ddot{\varphi} \cdot A_{52} + \ddot{\psi} \cdot A_{53} + \ddot{x}_{\text{ск}} \cdot A_{54} + \ddot{y}_{\text{ск}} \cdot A_{55} = B_5, \end{cases} \quad (12)$$

где  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 5$  - коэффициенты, постоянные для рассматриваемого шага вычислений. Они определяются либо из начальных условий движения тела, либо из результатов вычислений предыдущего шага.

Выражения для вычисления коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 5$  имеют относительно громоздкий вид для их приведения в данной статье в полном объеме. Для примера, приведены выражения, с помощью которых вычисляются коэффициенты, входящие в первое уравнение системы линейных уравнений (12):

$$A_{11} = m \cdot \{ \sin \psi \cdot R_{Cz} + f \frac{\dot{x}_{\text{ск}}}{\sqrt{\dot{x}_{\text{ск}}^2 + \dot{y}_{\text{ск}}^2}} (\cos \psi \cdot R_{Cy} - \sin \psi \cdot R_{Cx}) \}, \quad (13)$$

$$A_{12} = m \cdot \{ -\sin \theta \cos \psi \cdot R_{Cz} - \cos \theta \cdot R_{Cy} + f \frac{\dot{x}_{\text{ск}}}{\sqrt{\dot{x}_{\text{ск}}^2 + \dot{y}_{\text{ск}}^2}} \times (\sin \theta \sin \psi \cdot R_{Cy} + \sin \theta \cos \psi \cdot R_{Cx}) \}, \quad (14)$$

$$A_{13} = -m \cdot R_{Cy}, \quad (15)$$

$$A_{14} = m, \quad (16)$$

$$A_{15} = 0, \quad (17)$$

$$B_1 = m(\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi) R_{Cz} + \quad (18)$$

$$+ m \cdot f \frac{\dot{x}_{\text{ск}}}{\sqrt{\dot{x}_{\text{ск}}^2 + \dot{y}_{\text{ск}}^2}} \times$$

$$\times \{ (-\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi) R_{Cy} -$$

$$- (\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi) R_{Cx} +$$

$$+ (\omega_x R_{Cx} + \omega_y R_{Cy} + \omega_z R_{Cz}) \omega_z -$$

$$- \omega^2 R_{Cz} + \ddot{r}_{\text{вб.з}} \} - m \cdot \{ (-\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta) R_{Cy} +$$

$$+ (\omega_x R_{Cx} + \omega_y R_{Cy} + \omega_z R_{Cz}) \omega_x -$$

$$- \omega^2 R_{Cx} + \ddot{r}_{\text{вб.х}} \} - G_x - G_z \cdot f \frac{\dot{x}_{\text{ск}}}{\sqrt{\dot{x}_{\text{ск}}^2 + \dot{y}_{\text{ск}}^2}}.$$

Пользуясь линейностью уравнений (12), для их решения может быть использован достаточно простой метод, например, использующий правило Крамера, согласно которому:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\Delta_1(t - \Delta t)}{\Delta(t - \Delta t)}, \quad (19)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{\Delta_2(t - \Delta t)}{\Delta(t - \Delta t)}, \quad (20)$$

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{\Delta_3(t - \Delta t)}{\Delta(t - \Delta t)}, \quad (21)$$

$$\ddot{x}_{\text{ск}}(t) = \frac{\Delta_4(t - \Delta t)}{\Delta(t - \Delta t)}, \quad (22)$$

$$\ddot{y}_{\text{ск}}(t) = \frac{\Delta_5(t - \Delta t)}{\Delta(t - \Delta t)}, \quad (23)$$

где  $\Delta(t - \Delta t)$  - определитель матрицы коэффициентов  $\{A_{ij}\}$ , которые получены на предыдущем шаге вычислений

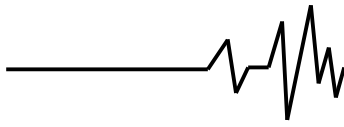
$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(t - \Delta t), \quad \Delta_2(t - \Delta t), \quad \Delta_3(t - \Delta t),$$

$\Delta_4(t - \Delta t)$ ,  $\Delta_5(t - \Delta t)$  - определители матрицы коэффициентов, в которой заменены столбцы с соответствующими номерами на элементы вектора-столбца  $\mathbf{B} = \{B_i\}$ . Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ B_2 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ B_3 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ B_4 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ B_5 & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}.$$

На основании полученных для  $s$ -го шага вычислений значений угловых ускорений и ускорений проскальзывания  $\ddot{\theta}(t)$ ,  $\ddot{\psi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{r}_{\text{ск.х}}(t)$ ,  $\ddot{r}_{\text{ск.у}}(t)$ ,  $t = t_0 + \Delta t \cdot s$ , путём пошагового интегрирования могут быть получены величины углов поворота  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  и координат вектора проскальзывания  $x_{\text{ск}}(t)$ ,  $y_{\text{ск}}(t)$ ,



которые приобретает тело на данном шаге вычислений. Выражения, с помощью которых осуществляется пошаговое интегрирование кинематических параметров движения тела, имеют вид:

$$\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_{s-1} + \ddot{\theta}_s \cdot \Delta t, \quad (24)$$

$$\theta_s = \theta_{s-1} + \dot{\theta}_s \cdot \Delta t, \quad (25)$$

$$\dot{\phi}_s = \dot{\phi}_{s-1} + \ddot{\phi}_s \cdot \Delta t, \quad (26)$$

$$\phi_s = \phi_{s-1} + \dot{\phi}_s \cdot \Delta t, \quad (27)$$

$$\dot{\psi}_s = \dot{\psi}_{s-1} + \ddot{\psi}_s \cdot \Delta t, \quad (28)$$

$$\psi_s = \psi_{s-1} + \dot{\psi}_s \cdot \Delta t, \quad (29)$$

$$(\dot{x}_{\text{ck}})_s = (\dot{x}_{\text{ck}})_{s-1} + (\ddot{x}_{\text{ck}})_s \cdot \Delta t, \quad (30)$$

$$(x_{\text{ck}})_s = (x_{\text{ck}})_{s-1} + (\dot{x}_{\text{ck}})_s \cdot \Delta t, \quad (31)$$

$$(\dot{y}_{\text{ck}})_s = (\dot{y}_{\text{ck}})_{s-1} + (\ddot{y}_{\text{ck}})_s \cdot \Delta t, \quad (32)$$

$$(y_{\text{ck}})_s = (y_{\text{ck}})_{s-1} + (\dot{y}_{\text{ck}})_s \cdot \Delta t, \quad (33)$$

где  $\ddot{\theta}_s$ ,  $\ddot{\phi}_s$ ,  $\ddot{\psi}_s$ ,  $(\ddot{x}_{\text{ck}})_s$ ,  $(\ddot{y}_{\text{ck}})_s$  - результаты решения системы уравнений (12) на  $s$ -ом шаге вычислений;

$\dot{\theta}_{s-1}$ ,  $\theta_{s-1}$ ,  $\dot{\phi}_{s-1}$ ,  $\phi_{s-1}$ ,  $\dot{\psi}_{s-1}$ ,  $\psi_{s-1}$ ,  $(\dot{x}_{\text{ck}})_{s-1}$ ,  $(x_{\text{ck}})_{s-1}$ ,  $(\dot{y}_{\text{ck}})_{s-1}$ ,  $(y_{\text{ck}})_{s-1}$  - кинематические параметры движения и координаты тела, полученные на предыдущем,  $(s-1)$ -ом шаге вычислений.

Для последовательности вычислительных шагов  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $S = \frac{T}{\Delta t}$ ,

где  $T$  - установленный период времени, формируется соответствующая им последовательность значений кинематических параметров движения тела. Последовательность кинематических параметров является законом движения тела по времени. Используя полученный закон движения тела по времени, может быть восстановлена траектория движения центра массы тела относительно рабочей поверхности. Местоположение центра массы тела относительно рабочей поверхности определяется путём пошагового интегрирования пути, пройденного центром массы тела на момент времени  $t = t_0 + \Delta t \cdot s$ :

$$x_s = \sum_{k=1}^s (x_{\text{ck}})_k + \sum_{k=1}^s [(x_{\text{K}})_k - (x_{\text{K}})_{k-1}] + (R_{\text{Cx}})_s, \quad (34)$$

$$y_s = \sum_{k=1}^s (y_{\text{ck}})_k + \sum_{k=1}^s [(y_{\text{K}})_k - (y_{\text{K}})_{k-1}] + (R_{\text{Cy}})_s, \quad (35)$$

где  $(x_{\text{ck}})_k$ ,  $(y_{\text{ck}})_k$  - проекции вектора пути проскальзывания, пройденного телом на  $k$ -ом шаге вычислений,  $k = 1, 2, \dots, s$ ;

$(x_{\text{K}})_{k-1}$ ,  $(x_{\text{K}})_k$ ,  $(y_{\text{K}})_{k-1}$ ,  $(y_{\text{K}})_k$  - координаты точки контакта тела с рабочей поверхностью в системе координат рабочей поверхности при выполнении  $k-1$ -го и  $k$ -го шагов вычислений, соответственно;

$(R_{\text{Cx}})_s$ ,  $(R_{\text{Cy}})_s$  - проекции радиус-вектора, соединяющего точку контакта с центром массы тела, в системе координат рабочей поверхности для  $s$ -го шага вычислений.

Значения координат точки контакта тела с рабочей поверхностью на рассматриваемом  $k$ -ом шаге вычислений определяются путём выбора такой точки дискретной разбивки поверхности тела, которая при вычисленных для  $k$ -го шага значениях направляющих косинусов поворота осей собственной системы координат тела относительно осей системы координат рабочей поверхности имеет минимальное превышение над рабочей поверхностью. То есть

$$(l; m)_k = \arg \left( \min_{l, m} z_{lm} \right),$$

где  $(l; m)_k$  - номера индексов, определяющих  $l$ -ый меридиан и  $m$ -ую параллель, которые задают дискретную точку разбивки поверхности эллипсоида на дискретные участки, являющуюся точкой контакта тела с рабочей поверхностью при заданных углах поворота осей собственной системы координат относительно системы координат рабочей поверхности;  $z_{lm}$  - величина превышения рассматриваемой дискретной точки эллипсоида над рабочей поверхностью.

Таким образом, в данной статье предложен метод численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение тела с перекачиванием и проскальзыванием по рабочей поверхности. Предлагаемый метод использует процедуру линеаризации уравнений движения, позволяющую существенно упростить алгоритм решения задачи.

Результаты, представленные в данной статье, целесообразно использовать при разработке алгоритмов программ, реализующих на современных ЭВМ математические модели движения зёрен по рабочим поверхностям виброочистительных машин.

### Литература

1. Манчинський Ю. О. Обґрунтування параметрів розділення насінних сумішей на віброуючій поверхні: Авторефер. дис. докт. техн. наук: 05.20.01 / Нац. агр. ун-т. – К: НАУ, 2000. – 36 с.