



Кузьо І. В.  
Ланець О. В.  
Гурський В. М.

Національний  
університет  
“Львівська  
політехніка”

УДК 621.01

## ФОРМУВАННЯ ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З АЕРОІНЕРЦІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ

*На базе уравнений Лагранжа II-го рода разработана математическая модель трехмассовой вибрационной машины с аэроинерционным приводом. Составлена и решена числовым способом нелинейная автономная система дифференциальных уравнений. Полученные результаты, подтвержденные экспериментально, указали на возможность использования таких приводов в вибрационных машинах. Сформированы преимущества систем с аэроинерционным приводом.*

*On the base of equalizations of Lagrange the mathematical model of three-masses vibratory machine with an aero inertia drive is developed. The nonlinear off-line system of differential equalizations is made and solved by a numerical method. Aquired results, confirmed experimentally, specified on possibility of the use of such drives in vibratory machines. Advantages of the systems with an aero inertia drive are formed.*

### **Вступ та огляд літератури.**

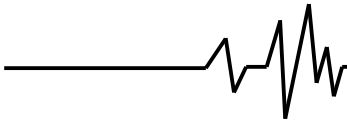
Більшість вібраційного технологічного обладнання реалізовано на інерційному приводі з використанням зарезонансних режимів роботи. Приведення в рух таких систем здійснюється, в основному, від асинхронних двигунів. Підбір електродвигуна в цих вібраційних машинах обумовлюється необхідністю забезпечення певної потужності привода для переходу через резонанс. Проте, на сьогодні існують підходи, що дозволяють знижувати потужність привода для такого типу обладнання [1].

На сьогодні у світі стрімко розвивається двомасове резонансне вібраційне технологічне обладнання з інерційними віброзбудниками, режим роботи яких дорезонансний відносно власної частоти системи. Це дозволяє суттєво знизити споживану потужність привода, що в першу чергу викликано наявністю в білярезонансних режимах роботи підвищених коефіцієнтів динамічності системи. У такому випадку, за тих самих значень збудувальних інерційних сил, амплітуди коливань можуть динамічно підсилюватись і зростати до 5...8 разів залежно від резонансного налагодження з механічної коливальної системи. Проте, втримати номінальну частоту обертання дебалансних віброзбудників в близькому дорезонансному режимі доволі складно. З

використанням сучасних електронних пристроїв для регулювання обертів електродвигуна дана проблема усувається.

**Постановка проблеми.** Вузол електродвигун-інерційний привід це взаємопов'язана електромеханічна система, а тому є ймовірність виходу з ладу електродвигуна під час роботи в білярезонансних режимах. Так, непередбачене “зависання” обертів дебаланса на одній з резонансних частот при його розгоні може викликати перегрів електродвигуна.

**Висунута гіпотеза.** Дана проблема спонукає до пошуку нових підходів у збудненні дебалансних віброзбудників у білярезонансних режимах роботи, які усунуть вище вказані недоліки. З цією метою пропонується наступний концептуальний підхід: інерційний віброзбудник, що жорстко з'єднаний з крильчаткою, приводить в рух за допомогою повітряних потоків, які розкручуватимуть дебаланс на номінальну частоту обертання білярезонансного режиму роботи вібраційної машини. Умовне “фіксування” частоти обертання дебаланса здійснюватиметься шляхом його “зависання” в дорезонансному режимі відносно однієї з власних частот  $n$ -масової механічної коливальної системи. Тобто, передбачається, що динамічний момент [1, 2] на валу дебалансного віброзбудника буде вищим за збудувальний момент, який



генеруватиметься крильчаткою. У такому випадку дебаланс, не маючи необхідного моменту збурення для переходу через резонанс, “зависне” на певній частоті обертання в дорезонансному режимі. Перевагою такої схеми є наявність автоматично набутого захисту приводу від перевантаження в умовах використання резонансних режимів роботи. Адже, неспроможність переходу через резонанс дебаланса, збуреного повітряним потоком, ніяк не впливає на саме джерело збурення. Такий тип збурення є аналогом кулькових пневматичних віброзбудників, а тому, отримані в подальшому результати можна перенести на вібраційні машини зі згаданим типом віброзбудника.

**Формування задачі.** Для реалізації цього підходу необхідно вирішити низку задач, а в першу чергу – вибрати та математично описати найбільш оптимальну структуру механічної коливальної системи, яка уможливить використання малопотужного інерційного приводу для збурення коливальних. Другим етапом є обґрунтування інерційно-жорсткісних параметрів системи. В даній статті акцент зроблено виключно на виборі структури вібраційної машини, формуванні та аналізі її математичної моделі.

**Вибір структурної схеми вібраційної машини.** Відразу ж обумовимо, що використання двомасових коливальних систем з аероінерційним збуренням ускладнюється з наступної причини. В двомасових структурах робочий орган та реактивна маса повинні бути співмірними. Це означає, що збурення легшої маси дебалансним віброзбудником, що приводитиметься в рух від крильчатки, не дозволить розвивати високі амплітуди коливальних, адже потужність приводу відносно невисока. У свою чергу відомі тримасові системи [3], де збурення коливальних важкого робочого органа здійснюється від надлегкої маси, яка на порядок і вище може бути легшою за решту мас. В таких системах використовують міжрезонансні режими роботи, застосування яких у нашому випадку із інерційним приводом, збуреним від повітряних потоків, може бути ускладненим. Те ж явище Зомерфельда може унеможливити входження дебаланса у міжрезонансну зону.

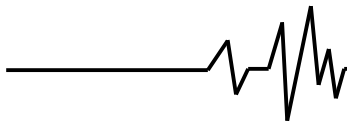
З іншою сторони, якщо ми будемо не в змозі досягнути другої власної частоти коливальних, завжди можемо використати дорезонансний режим роботи відносно першої власної частоти коливальних системи, де явище Зомерфельда взагалі буде відсутнє. У будь-якому випадку використання лівої гілки

резонансної кривої обумовлюватиме стійке обертання дебаланса [4, 5].

Отже, свій вибір зупиняємо на тримасових структурах, які, в цілому, уможливають створення вібраційних машин на базі малопотужних інерційних віброзбудників зі збуренням від повітряних потоків.

**Математична модель вібраційних машин на базі малопотужних інерційних віброзбудників зі збуренням від повітряних потоків.** Принципова схема тримасової вібраційної машини, в якій реалізовані прямолінійні коливання, наведена на рис. 1. Вважаємо, що закон зміни жорсткості в пружних елементах не виходить за межі лінійності і відповідає закону Гука. Це виправдано за умови реалізації малих коливальних у вібраційній машині. Механічну систему розглядаємо як таку, що складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних пружними системами строго визначеної жорсткості. Щодо врахування середовища в математичній моделі, то приймаємо модель, де опір руху робочого органа вібраційної машини відображається коефіцієнтом в'язкого тертя  $\mu_1$ , а інертність самого середовища – у вигляді частки  $k_{np}$  приєднаної маси середовища завантаження  $m_c$ , що умовно приєднано до робочого органа  $m_{po}$ . Тому, інерційне значення коливальної маси  $m_1$ , що виконує функцію робочого органа, формується як  $m_1 = m_{po} + k_{np}m_c$ .

Робочий орган масою  $m_{po}$ , проміжна маса  $m_2$  та реактивна  $m_p$  здійснюють прямолінійні коливання вздовж осі  $x$  за координатами відповідно  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$ . Робочий орган  $m_{po}$  та умовно приєднана частина  $k_{np}m_c$  маси середовища завантаження утворюють масу  $m_1$ . Реактивна маса  $m_p$ , маса крильчатки  $m_b$  з моментом інерції  $J_b$  відносно власної осі симетрії та маса дебаланса  $m_d$  утворюють масу  $m_3$ . Проміжна маса  $m_2$  приводиться в рух завдяки кінематичному збуренню від маси  $m_3$ . У свою чергу маса  $m_1$  кінематично збурюється від маси  $m_2$ . Силоне збурення вимушених коливальних в системі відбувається за рахунок дії потоків повітря  $\Psi$  на крильчатку, до однієї з лопатей якої жорстко прикріплена незрівноважена маса  $m_d$  (маса дебаланса). Крутний момент  $M$ , що виникає на крильчатці, приводить в обертальний рух масу  $m_d$  на радіусі  $r$ , відцентрові сили від якої і є причиною виникнення знакозмінного силового



збурення маси  $m_3$ , а як наслідок, її коливальних рухів вздовж осі  $x$ . Маси  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  попарно з'єднані між собою пружними системами із жорсткостями відповідно  $c_{12}$  та

$c_{23}$  у напрямку коливань вздовж осі  $x$ . Вібруюча машина встановлена на нерухому основу через віброізолятори жорсткістю  $c_{i3}$ , що кріпляться до маси  $m_1$ .

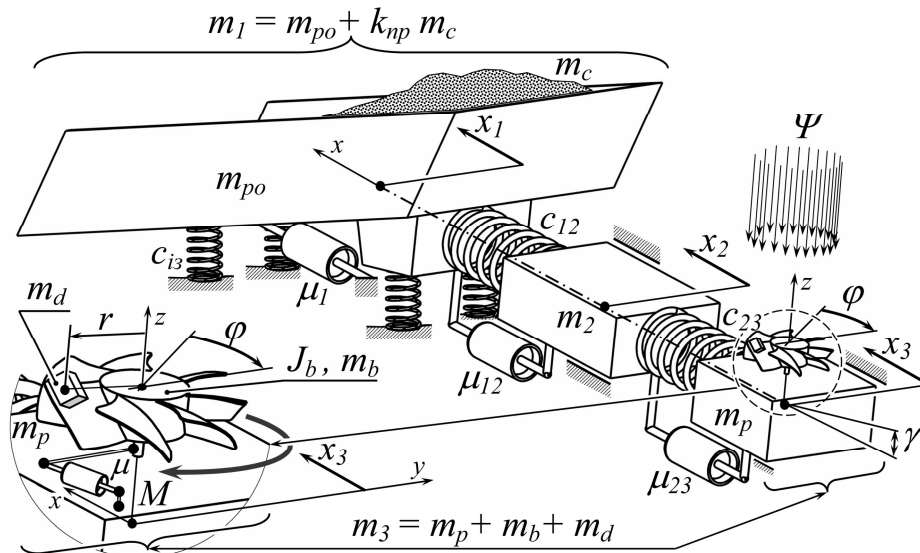


Рис. 1. Принципова схема тримасової вібраційної машини на базі малопотужного інерційного віброзбудника зі збуренням від повітряних потоків

Кут кидання у вібраційній машині  $\gamma$ , що відображає нахил відносно горизонту умовної лінії, що з'єднує її центри мас та центри жорсткостей пружних систем. Забезпечення цієї умови унеможливорює виникнення паразитних кутових коливань, тому вона застосована і для схеми на рис. 1, де передбачається досягати строго прямолінійних коливань в системі.

В динамічну модель у вигляді демпферів вводяться коефіцієнти в'язкого тертя  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{23}$ , які пропорційні швидкості і відображають розсіювання енергії у відповідних пружних системах. Якщо матеріал пружин сталь, величини  $\mu_{i,i+1}$  відобразатимуть конструкційний гістерезис і визначатимуться як  $\mu_{i,i+1} = \gamma c_{i,i+1} / \omega$ , де  $\gamma$  – коефіцієнт внутрішнього частотно-незалежного тертя;  $\omega$  – кутова частота вимушених коливань. Коефіцієнт  $\mu_1$  є комплексним показником, що описує зовнішній в'язкий опір руху маси  $m_1$  і викликаний впливом маси середовища завантаження  $m_c$  та в'язким тертям у віброізоляційних пружних елементах жорсткістю  $c_{i3}$ . Коефіцієнт  $\mu$  відображає в'язке тертя під час обертання крильчатки.

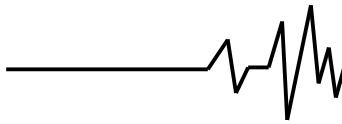
Колівальна система має 4 ступені рухомості, а саме рух трьох мас за координатами  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  та обертання

крильчатки на кут  $\varphi$ . Саме ці координати виберемо як узагальнені. Для формування диференціальних рівнянь, що описують дану механічну колівальну систему, використаємо узагальнені рівняння руху Лагранжа II-го роду, які в загальному записі матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} + Q_{x_1}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} + Q_{x_2}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_3} + Q_{x_3}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + Q_{\varphi}. \end{cases} \quad (1)$$

де  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$ ,  $Q_{x_i}$  та  $Q_{\varphi}$  – відповідно кінетична і потенціальна енергії, функція розсіювання енергії в системі (дисипативна функція Релея) та узагальнені збурювальні зусилля за лінійними координатами  $x_i$  та кутом повороту  $\varphi$ .

Зупинимось на найскладнішій ділянці даної моделі, а саме на визначенні кінетичної енергії маси  $m_3$  та узагальненого збурювального зусилля, що прикладається до неї.



Кінетична енергія  $T_3$  маси  $m_3$  формуватиметься з трьох складових:

$$T_3 = T_p + T_b + T_d, \quad (2)$$

де  $T_p, T_b, T_d$  – кінетичні енергії відповідно реактивної маси  $m_p$ , маси крильчатки  $m_b$  та маси дебаланса  $m_d$ . Реактивна маса здійснює коливальний рух за лінійною координатою  $x_3$ , тому:

$$T_p = \frac{m_p \dot{x}_3^2}{2}. \quad (3)$$

Крильчатка здійснює коливальний рух за лінійною координатою  $x_3$  та обертальний рух за кутом повороту  $\varphi$ , а тому:

$$T_b = \frac{m_b \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J_b \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (4)$$

Маса дебаланса  $m_d$  здійснює складний рух, викликаний обертанням на радіусі  $r$  по координаті  $\varphi$  навколо осі симетрії крильчатки з одночасним здійсненням коливального руху за координатою  $x_3$  (рис. 2).

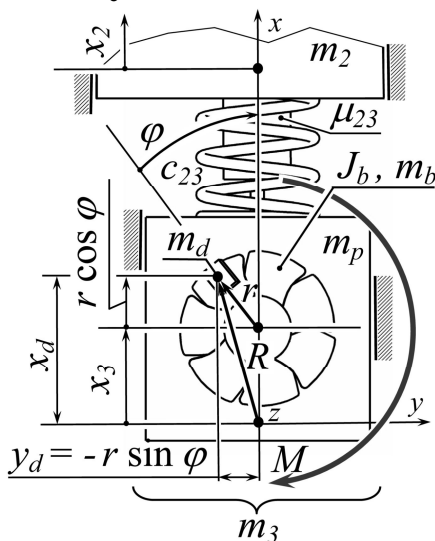


Рис. 2. Проекційний вигляд зверху на масу  $m_3$

Спочатку знайдемо складові по координатних осях вектора сумарного переміщення  $R$  маси дебаланса в просторі. Отже, проекція вектора переміщення маси дебаланса на вісь  $x$  рівна:

$$x_d = -r \sin \varphi. \quad (5)$$

На вісь  $y$ :

$$y_d = x_3 + r \cos \varphi. \quad (6)$$

Диференціюючи вирази (5) та (6) за часом  $t$ , проекції вектора сумарної швидкості маси дебаланса по осях  $x$  та  $y$  матимуть вигляд:

$$\dot{x}_d = -r \dot{\varphi} \cos \varphi; \quad (7)$$

$$\dot{y}_d = \dot{x}_3 - r \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (8)$$

Квадрат сумарного вектора швидкості маси дебаланса  $m_d$ , використовуючи (7) та (8), становитиме:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2 = (-r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{x}_3 - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 = \\ &= \dot{x}_3^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2 \dot{x}_3 r \dot{\varphi} \sin \varphi = \\ &= \dot{x}_3^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{x}_3 r \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

У такому випадку кінетична енергія маси дебаланса, враховуючи (9), набуде вигляду:

$$T_d = \frac{m_d \dot{R}^2}{2} = \frac{m_d (\dot{x}_3^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{x}_3 r \dot{\varphi} \sin \varphi)}{2}. \quad (10)$$

Підставляючи в (2) вирази (3), (4) та (10) для кінетичних енергій складових маси  $m_3$ , отримаємо її кінетичну енергію  $T_3$ :

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{m_p \dot{x}_3^2}{2} + \frac{m_b \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J_b \dot{\varphi}^2}{2} + \\ &+ \frac{m_d (\dot{x}_3^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{x}_3 r \dot{\varphi} \sin \varphi)}{2} = \\ &= \frac{(m_p + m_b + m_d) \dot{x}_3^2}{2} + \frac{(J_b + m_d r^2) \dot{\varphi}^2}{2} - \\ &- m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Ввівши наступні позначення:  $m_3 = m_p + m_b + m_d$ ,  $J = J_b + m_d r^2$ , вираз (11) набуде наступного скороченого вигляду:

$$T_3 = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} - m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (12)$$

Тепер встановимо значення узагальненої сили  $Q_\varphi$  за координатою  $\varphi$ . Активними зусиллями, що діють на крильчатку є сила ваги  $G_d = m_d g$  незрівноваженої маси дебаланса та момент збурення  $M$ , спричинений дією потоків повітря  $\Psi$  (рис. 3, а).

Проекція сили ваги  $G_d$  на вісь  $x$ , що записується як  $-m_d g \sin \gamma$ , діючи на плечі  $-r \sin \varphi$ , утворюватиме момент:

$$M_g = m_d r g \sin \gamma \sin \varphi, \quad (13)$$

де  $\gamma$  – кут нахилу площини обертання крильчатки до горизонту (він же і кут кидання, кут нахилу пружних елементів відносно вертикалі).

Момент збурення  $M$ , що є функцією швидкості обертання вентилятора  $\dot{\varphi}$  (рис. 4), можна записати у вигляді лінійної залежності:

$$M = M_0 - a \dot{\varphi}, \quad (14)$$

де  $M_0$  – значення моменту збурення  $M$  при нерухомій крильчатці (коли  $\dot{\varphi} = 0$ );  $a = \tan \beta$ ;  $\beta$  – кут нахилу лінійної залежності  $M(\dot{\varphi})$  відносно

осі абсцис. Вважатимемо, що при зміні інтенсивності повітряного потоку  $\Psi$ , лінійна залежність  $M(\dot{\varphi})$  переміщується паралельно по відношенню до себе. Дійсно, зі зростанням швидкості обертання крильчатки  $\dot{\varphi}$  відносна швидкість потоків повітря  $\Psi$ , відносно її верхньої лопатей, падає, питомий тиск повітря на лопаті зменшується, а тому значення момента збурення також зменшується.

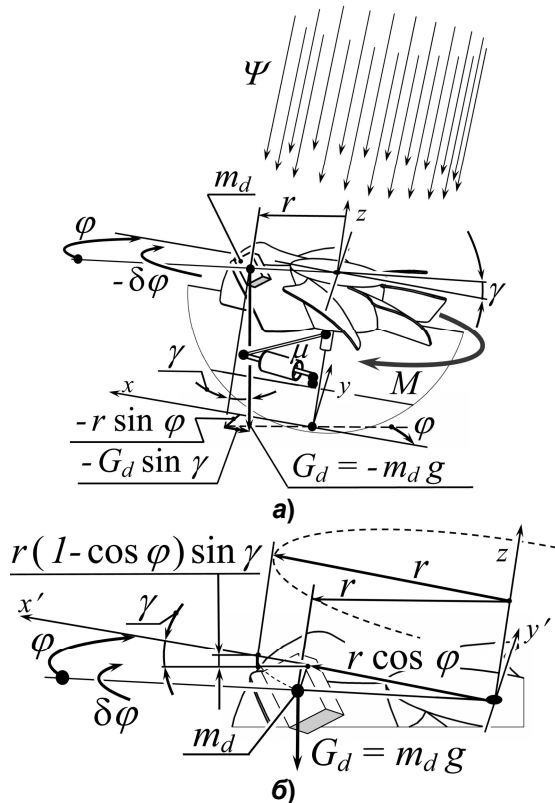


Рис. 3. Розрахункова схема для встановлення значення узагальненої сили за координатою  $\varphi$

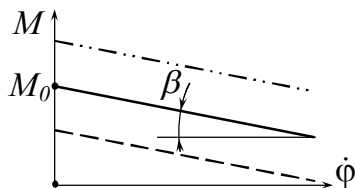


Рис. 4. Характеристика моменту збурення  $M$  крильчатки повітряним потоком в залежності від її швидкості обертання  $\dot{\varphi}$

Надамо обертальному руху крильчатки віртуальне переміщення  $-\delta\varphi$  за годинниковою стрілкою у напрямку дії моменту збурення  $M$  (рис. 3, а). Тоді робота сил на віртуальному переміщенні  $-\delta\varphi$ , беручи до уваги вирази (13) та (14), набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \delta A &= (m_d r g \sin \gamma \sin \varphi - M_0 + a \dot{\varphi})(-\delta \varphi) = \\ &= (M_0 - a \dot{\varphi} - m_d r g \sin \gamma \sin \varphi) \delta \varphi. \end{aligned}$$

Узагальненою силою є коефіцієнт, що стоїть при  $\delta\varphi$ , а тому:

$$Q_\varphi = M_0 - a \dot{\varphi} - m_d r g \sin \gamma \sin \varphi. \quad (15)$$

Вище нами було прийнято, що сила ваги маси дебаланса  $G_d = m_d g$  неконсервативна, а є зовнішнім активним зусиллям, що діє на крильчатку. Якщо, віднести силу ваги до потенціальних, як воно і є в реальності, то останній доданок у формулі (15) можна визначити за залежністю  $-\frac{\partial \Pi_d}{\partial \varphi}$ . Так, при

переміщенні маси дебаланса з фіксованого положення, як на рис. 3, б, до співпадіння з віссю  $x$ , потенціальна енергія буде рівна роботі сил ваги. Отже  $\Pi_d = m_d g h = m_d g r (1 - \cos \varphi) \sin \gamma$ . У такому

випадку:  $-\frac{\partial \Pi_d}{\partial \varphi} = -m_d r g \sin \gamma \sin \varphi$ . Як бачимо,

отримано ідентичний доданок як і в (15).

Перейдемо до визначення кінетичних енергій мас  $m_1$  та  $m_2$ . Ці маси здійснюють прямолінійний коливальний рух, а тому їх сумарна кінетична енергія становить:

$$T_{1,2} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}. \quad (16)$$

Потенціальну енергію  $\Pi$  для тримасової механічної коливальної системи знайдемо як суму робіт відновлювальних сил пружності в пружних елементах, а отже:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{12} (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} c_{23} (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} c_{i3} x_2^2. \quad (17)$$

Дисипативну функцію  $\Phi$  для системи, вважаючи що розсіювання енергії пропорційне швидкості, розраховуємо за таким виразом:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \mu_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_{23} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Узагальнені збурювальні зусилля за координатами  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  відсутні, а тому:

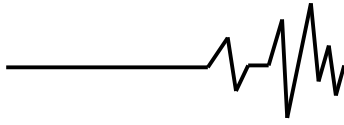
$$Q_{x_1} = Q_{x_2} = Q_{x_3} = 0. \quad (19)$$

Використовуючи (12), (16)-(18), знаходимо складові системи рівнянь (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_{12} (x_1 - x_2); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + c_{i3}x_2; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} &= \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} &= m_3 \dot{x}_3 - m_d r \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) &= m_3 \ddot{x}_3 - m_d r \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_d r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} &= c_{23}(x_3 - x_2); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_3} = \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= J \dot{\varphi} - m_d r \dot{x}_3 \sin \varphi; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= J \ddot{\varphi} - m_d r \ddot{x}_3 \sin \varphi - m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \cos \varphi; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = \mu \dot{\varphi}. \quad (20) \end{aligned}$$

Підставивши вирази (20) в рівняння Лагранжа II-го роду (1), врахувавши (15) та (19), система чотирьох диференціальних рівнянь руху, що описує модель інерційної вібраційної машини зі збуренням від повітряних потоків (рис. 1), набуде вигляду:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + c_{i3}x_1 + \\ + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \\ + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 - m_d r \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_d r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \\ + c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = 0; \\ J \ddot{\varphi} - m_d r \ddot{x}_3 \sin \varphi - m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ + m_d r \dot{x}_3 \dot{\varphi} \cos \varphi + \mu \dot{\varphi} = \\ = M_0 - a \dot{\varphi} - m_d r g \sin \gamma \sin \varphi. \end{cases} \quad (21)$$

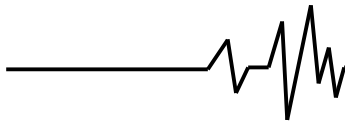
Згрупувавши рівняння (21), отримуємо:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + c_{i3}x_1 + \\ + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \\ + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 - m_d r (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \\ + c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = 0; \\ J \ddot{\varphi} - m_d r \sin \varphi (\ddot{x}_3 - g \sin \gamma) = \\ = M_0 - (a + \mu) \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (22)$$

Як бачимо, в нелінійні диференціальні рівняння системи (22) час  $t$  не входить у явному вигляді. Ці рівняння описують рух автономної системи ланцюгового типу. Попередньо не розв'язавши їх, закон зміни в часі кута повороту  $\varphi$  крильчатки встановити неможливо. Загальний наближений підхід для аналітичного розв'язку системи (22), шляхом введення малих параметрів та використання методу Крилова-Боголюбова, окреслений в [6] і є надто складним. Тому, в статті автори обмежились чисельним розрахунком з використанням методу Рунге-Кутта. Для цього систему (22) подамо у зручному для математичного продукту MathCAD вигляді, а саме перепишемо її, виокремивши прискорення по кожній узагальненій координаті. У такому випадку отримуємо:

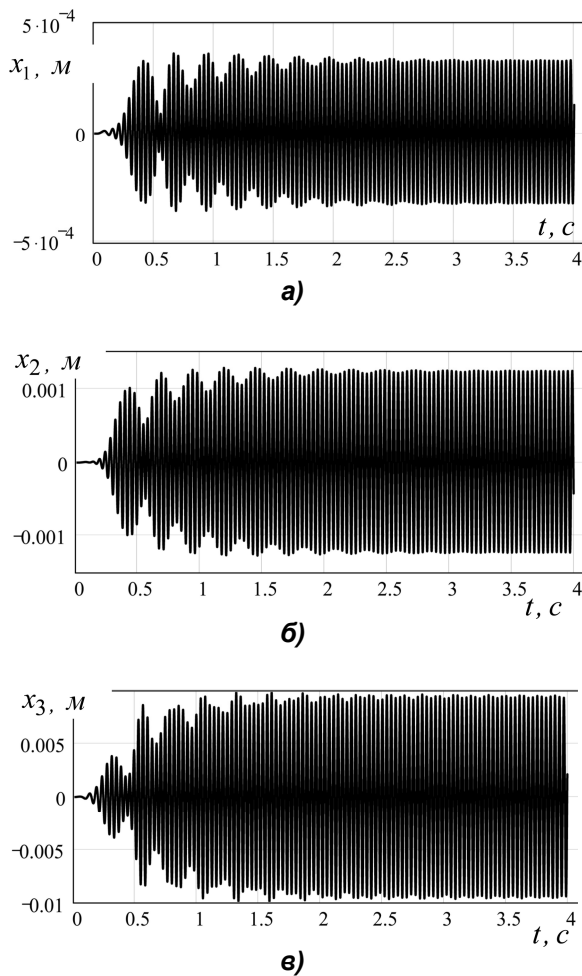
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{c_{12}(x_1 - x_2) + c_{i3}x_1 + \\ + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{-m_1}; \\ \ddot{x}_2 = \frac{c_{12}(x_2 - x_1) + c_{23}(x_2 - x_3) + \\ + \mu_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \mu_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)}{-m_2}; \\ \ddot{x}_3 = \frac{1}{m_d^2 r^2 \sin^2 \varphi - J m_3} \times \\ \times \left[ \begin{aligned} & m_d^2 r^2 g \sin^2 \varphi \sin \gamma - \\ & - m_d r \sin \varphi [M_0 - (a + \mu) \dot{\varphi}] - \\ & - m_d r J \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \\ & + J [c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)] \end{aligned} \right]; \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{m_d^2 r^2 \sin^2 \varphi - J m_3} \times \\ \times \left[ \begin{aligned} & -m_3 (M_0 - (a + \mu) \dot{\varphi}) + \\ & + m_d r \sin \varphi \times \\ & \times \left[ \begin{aligned} & c_{23}(x_3 - x_2) + \mu_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - \\ & - m_d r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + m_3 g \sin \gamma \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]. \end{cases} \quad (23)$$

Приймаємо наступні параметри системи: збурювальний момент є постійним ( $a = 0$ ) і становить  $M = 0.008 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $J = 1 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  – момент інерції крильчатки з жорстко закріпленою незрівноваженою масою (дебалансом)  $m_d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ; ексцентриситет (радіус розташування) дебаланса відносно осі

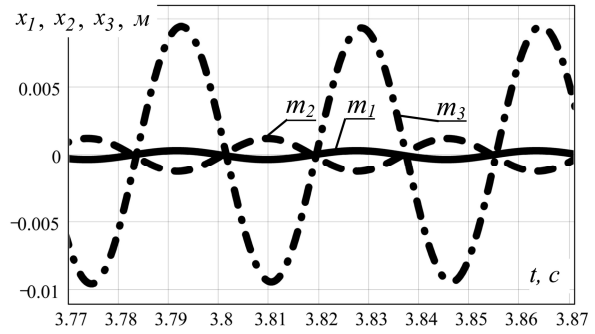


симетрії крильчатки:  $r = 0.028 \text{ кг}$ ; значення коливальних мас:  $m_1 = 20 \text{ кг}$ ;  $m_2 = 7 \text{ кг}$ ;  $m_3 = 0.2 \text{ кг}$ ; кут кидання  $\gamma = 0.3 \text{ рад}$ ; значення жорсткостей двох резонансних пружних систем та віброізоляторів:  $c_{12} = 1.3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ;  $c_{i3} = 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ;  $c_{23} = 5.8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ; значення коефіцієнтів в'язкого тертя:  $\mu_{12} = 20 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$ ;  $\mu_{23} = 0.2 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$ ;  $\mu = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$ ;  $\mu_1 = 100 \text{ Н}\cdot\text{с/м}$ .

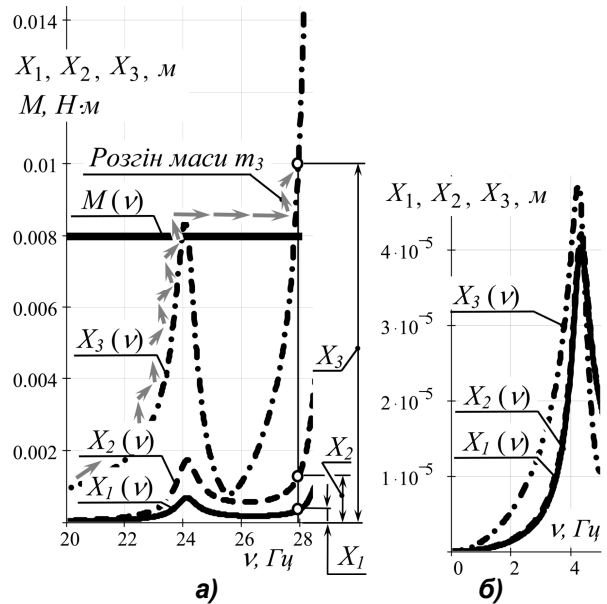
Часові залежності коливань мас в перші 4 с після запуску вібраційної машини (рис. 5 та рис. 6) свідчать про те, що перехідні процеси тривали до 3 с, а їх причина пояснюється, якщо детально проаналізувати АЧХ системи (рис. 7).



**Рис. 5. Часові залежності в перші 4 с руху коливальних мас  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  (рисунки відповідно а, б та в)**



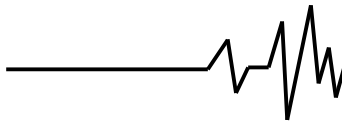
**Рис. 6. Усталені коливання мас після перехідних процесів**



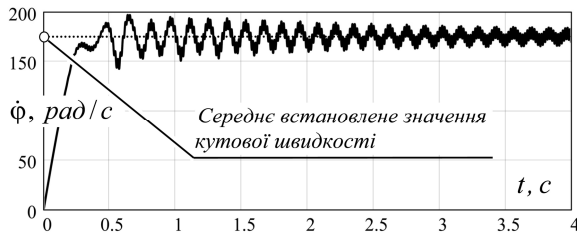
**Рис. 7. АЧХ тримасової системи: а – зображено дві власні частоти системи; б – зображено резонансний пік, викликаний віброізоляційними системами**

При спрямуванні повітряного потоку  $\Psi$  на крильчатку виникає крутний момент  $M$ , який починає її розкручувати. На частоті обертання крильчатки близько  $24 \text{ Гц}$  (рис. 7, а), в околі першої власної частоти коливань системи, крильчатка з прикріпленою незрівноваженою масою, як і вся система в цілому, переходить перший резонансний пік і перескакує на ліву гілку другого піка. Внаслідок цього проходять перехідні процеси, пов'язані з ефектом Зомерфельда [2, 4-7]. Значення моменту  $M$  на першій частоті є більшим за динамічний момент на валу дебалансного віброзбудника (крильчатки).

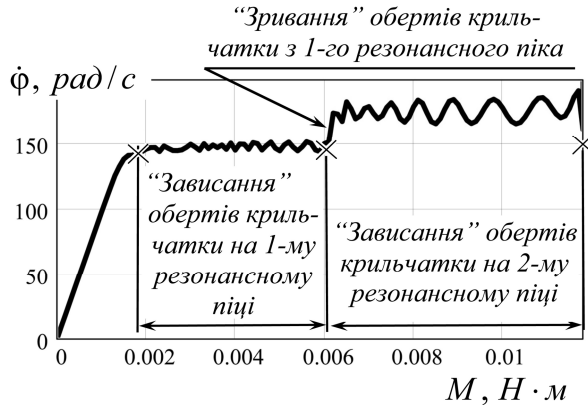
Частота обертання крильчатки "зависає" на лівій гілці другого власного піка системи (рис. 8 та рис. 9), який пройти вона не в змозі



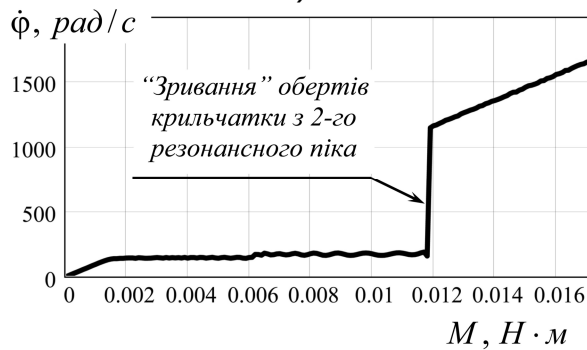
(момент  $M$  є замалим для долання динамічного момента на валі крильчатки). Вібруюча машина починає працювати в усталеному стійкому дорезонансному режимі відносного другого піка системи на частоті вимушених коливань 28 Гц (рис. 8).



**Рис. 8. Вихід кутової швидкості крильчатки на дорезонансний режим відносно 2-го власного піка системи**



а)



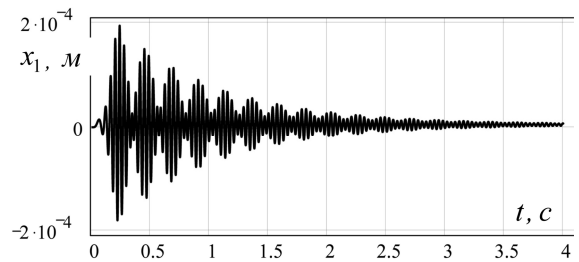
б)

**Рис. 9. Залежності швидкості обертання крильчатки від прикладеного до неї крутного моменту  $M$ , спричиненого потоками повітря  $\Psi$  (значення кутової швидкості  $\dot{\phi}$  фіксувались на 4-ій секунді після запуску системи)**

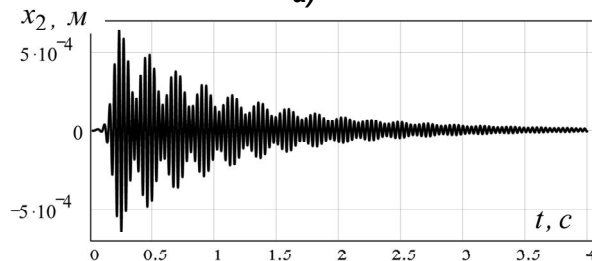
Зупинимось на аналізі рис. 9. В межах моменту збурення  $M = 0.002 \dots 0.006 \text{ Н} \cdot \text{м}$  прикладеного до крильчатки, частота її обертання залишається практично постійною зі середнім встановленим значенням кутової

швидкості  $\dot{\phi} \approx \omega = 147 \text{ рад/с}$ . По суті, оберти крильчатки “зависають” на 1-му резонансному піці. Зі зростанням моменту збурення, коли  $M > 0.006 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , відбувається “зривання” обертів крильчатки з 1-го резонансного піка. Частота крильчатки різко набирає оберти, фіксуючись зі значенням  $\dot{\phi} \approx \omega = 175 \text{ рад/с}$ , і практично не змінюється в межах моменту збурення  $M = 0.006 \dots 0.0118 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Оберти крильчатки “зависли” на 2-му резонансі. З подальшим зростанням моменту збурення, відбувається “зривання” обертів крильчатки з 2-го резонансного піка і крильчатка різко набирає оберти до значення  $\dot{\phi} = \omega = 1200 \text{ рад/с}$  і подалі зростає.

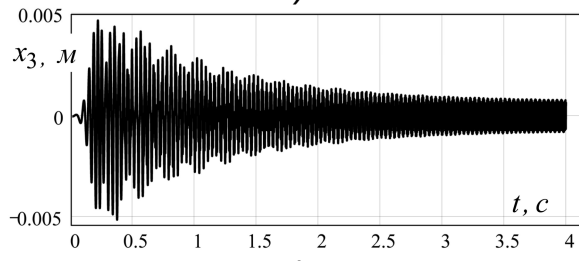
Якщо подати менший потік повітря  $\Psi$  – діятиме менший момент збурення  $M$ , крильчатка “зависне” на лівій гілці 1-го власного піка системи. Якщо прикласти більший крутний момент, крильчатка проскочить два власних піки (рис. 10 та рис. 11).



а)



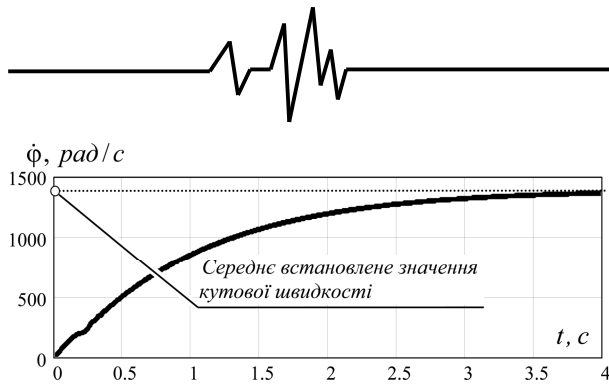
б)



в)

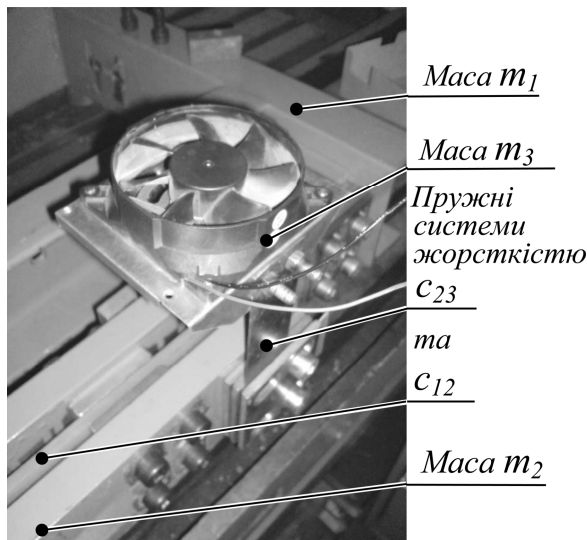
**Рис. 10. Часові залежності в перші 4 с під час “зривання” руху коливальних мас  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  при прикладанні до крильчатки моменту  $M = 0.014 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рисунки відповідно а, б, та в)**





**Рис. 11. Вихід кутової швидкості крильчатки на номінальну далекорезонансну кутову швидкість**

Резонансний пік, зумовлений дією віброізоляційних пружних елементів, система не відчуває (рис. 7, б). Це, по-перше, зумовлено тим, що інерційне збурення прикладається не на пряму до маси  $m_1$ , а опосередковано через легку масу  $m_3$ . По-друге, сила збурення на частоті резонансного піку, викликаного віброізоляторами, мізерна – близько  $0.1H$ . Наведені результати математичного моделювання, представлені на графіках (рис. 5-рис. 10) підтверджені на експериментальній установці (рис. 12).



**Рис. 12. Фрагмент експериментальної установки вібраційної машини з аероінерційним збуренням**

Перевагою таких вібраційних машин є: а) простота схеми збурення; б) унеможливлення перевантаження приводу крильчатки; в) наявність мінімально можливих значень незрівноваженої маси ( $m_d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ) та крутного моменту  $M = 0.008 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , щоб

приводити робочий орган масою  $m_1 = 20 \text{ кг}$  в рух з перевантаженням  $\xi = 1.1$ . Цей параметр можна підвищити, якщо збільшити величини  $m_d$  та  $M$ ; г) система практично не відчуває резонансного піку, викликаного дією віброізоляційних пружних елементів.

**Висновок.** Проведені теоретико-експериментальні дослідження підтвердили висунуту гіпотезу про можливість використання інерційних віброзбудників, що приводяться в рух за рахунок дії повітряних потоків на крильчатку, для збурення та стабільної роботи вібраційних машин в білярезонансному режимі роботи. Умовне "фіксування" частоти обертання дебаланса здійснюється шляхом його "зависання" в дорезонансному режимі відносно однієї з власних частот коливань тримасової механічної коливальної системи. Такі системи мають автоматично набутий захист приводу від перевантаження.

### Література

1. Ярошевич М. П. Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом / М. П. Ярошевич, Т. С. Ярошевич. – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.
2. Блехман И. И. Вибрационная механика / И. И. Блехман. М.: Изд-во "Физматлит", 1994. – 400 с.
3. Ланець О. С. Високоєфективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): монографія / О. С. Ланець. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008. – 324 с.
4. Вибрации в технике: Справочник: В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1979 – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под. ред. И. И. Блехмана. 1979. – 351 с., ил.
5. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Изд-во "Наука", 1976. – 320 с., ил.
6. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. – М.: Изд-во "Наука", 1964. – 256 с., ил.
7. Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники / И. И. Быховский. – М.: Изд-во "Машиностроение", 1968. – 362 с.