

* * *

Вітаю всіх учасників I регіональної науково-практичної конференції молодих науковців «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах – 2011»!

Кафедра вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці Вінницького національного аграрного університету стала ініціатором проведення конференції з метою, аби надати можливість молодим науковцям (студентам, бакалаврам, магістрам, аспірантам, викладачам) продемонструвати свої наукові інтереси, наукові здобутки, обговорити їх та отримати оцінку своїх результатів.

Зрозуміло, що в сучасних умовах величезної сили набуває прикладна наука, а тому необхідно зміцнювати теоретичну складову професійної підготовки студентів.

Тенденції, які намітились на шляху реформування системи освіти, на жаль, викликають занепокоєння. Забезпечувати фундаментальну підготовку студентів стає все важче, оскільки прогалини в знаннях шкільних курсів не зменшуються. Недостатні мотиваційні основи, перевантаженість навчальних програм та деякі інші моменти створюють значні перешкоди на шляху оволодіння фундаментальними знаннями.

Проте, ми маємо і досить здібних студентів, які навчаються з задоволенням і проявляють інтерес до наукових досліджень. Насамперед, для тих, хто робить свої перші кроки в науці, і була зініційована дана конференція.

Дякуємо всім, хто прийняв участь у роботі конференції, особливо кафедрам економічної кібернетики ВНАУ, аудиту та державного контролю ВНАУ, фізики ВДПУ, методики викладання фізики ВДПУ, математики та інформатики ВДПУ, алгебри та методики викладання математики ВДПУ, загальної фізики та фотоніки ВНТУ.

Д.А. Найко

Секція 1. МАТЕМАТИКА

к.ф.-м.н., доц. Найко Д.А.

Вінницький національний аграрний університет

q -ПАРАМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ БЕРНШТЕЙНА

Встановлюється асимптотична рівність наближення q -поліномами Бернштейна степеневих функцій

В 1997 році Phillips [1] ввів узагальнені поліноми Бернштейна $B_n(f, q; x)$, побудовані на q -біноміальних коефіцієнтах ($q > 0$). При $q = 1$ поліноми $B_n(f, q; x)$ збігаються з класичними многочленами Бернштейна, але у випадку $q \neq 1$ – це новий клас поліномів, що мають цілий ряд несподівано цікавих властивостей.

Наведемо означення цих операторів, деякі їхні властивості та встановимо одну асимптотичну формулу наближення q -операторами Бернштейна степеневі функції.

Нехай $q > 0$. Для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ q -число $[n]_q$ визначається у вигляді

$$[n]_q := 1 + q + \dots + q^{n-1} \quad (n \in N), \quad [0]_q := 0.$$

Вводиться q -факторіал $[n]_q!$ за допомогою рівності

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q \quad (n \in N), \quad [0]_q! := 0.$$

q -біноміальними коефіцієнтами називаються числа

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Означення (Phillips [1]). Нехай $f \in C[0, 1]$. Узагальненим поліномом Бернштейна, побудованим на q -числах, називається поліном

$$B_n(f, q; x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

(Вважаємо, що порожній добуток дорівнює одиниці.)

Якщо $q = 1$, то

$$B_n(f, q; x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} -$$

класичний многочлен Бернштейна. З (1) випливає, що

$$B_n(f, q; 0) = f(0), \quad B_n(f, q; 1) = f(1)$$

при всіх $q > 0$ та всіх $n \in N$.

В [1] показано, що

$$B_n(at + b, q; x) = ax + b \tag{2}$$

для всіх $q > 0$ та всіх $n \in N$, а також доведено таку теорему.

Теорема 1. Нехай послідовність $\{q_n\}$ така, що $0 < q_n < 1$ і $q_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді для будь-якої функції $f \in C[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, q_n; x) = f(x)$$

рівномірно відносно $x \in [0, 1]$.

Теорема 2. Нехай $0 < q < 1$. Тоді

$$|B_n(f, q; x) - B_\infty(f, q; x)| \leq c\omega_2(f, \sqrt{q^n x(1-x)}).$$

Крім того,

$$\sup_{q \in (0, 1]} |B_n(f, q; x) - B_\infty(f, q; x)| \leq c\omega_2(f, \sqrt{x(1-x)/n}),$$

де c – абсолютна стала.

Позначимо через

$$p_{nk}(q; x) := \binom{n}{k}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \quad n \in N.$$

Очевидно, що $p_{nk}(q; x) \geq 0$ при $q \in (0, 1)$ та $x \in [0, 1]$. З (2) при $a = 0$ $b = 1$ одержуємо, що

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}(q; x) = 1 \quad \forall n \in N.$$

Легко бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[k]_q}{[n]_q} = 1 - q^k$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{nk}(q; x) = \frac{x^k}{(1-q)^k [k]_q!} \prod_{s=0}^{\infty} (1 - q^s x) := p_{\infty k}(q; x).$$

Очевидно, що $p_{\infty k}(q; x) \geq 0$ для $x \in [0, 1]$, крім того, відомо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}(q; x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Нехай

$$B_\infty(f, q; x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(1 - q^k) p_{\infty k}(q; x), & \text{коли } x \in [0, 1), \\ f(1), & \text{коли } x = 1. \end{cases} \tag{3}$$

О. Ільїнським та С. Островською [2] встановлено такі результати.

Теорема 3. Для будь-якої функції $f \in C[0,1]$

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} B_{\infty}(f, q; x) = f(x)$$

рівномірно по $x \in [0,1]$.

Теорема 4. Якщо f – многочлен, то

$$\deg B_{\infty}(f, q; x) = \deg f.$$

Теорема 5. Нехай f є многочлен. В цьому випадку $B_{\infty}(f, q; x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f = 0$.

Теорема 6. Нехай $f \in C[0,1]$, $q \in (0,1)$ – фіксоване.

Тоді $B_{\infty}(f, q; x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) = ax + b \quad (a = \text{const}, b = \text{const})$.

Філіпс [1] показав, що

$$B_n(t^2, q; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \quad (4)$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t^2, q; x) = x^2$ тоді і тільки тоді, коли $q \geq 1$.

Кажуть, що $f \in C[0,1]$ задовольняє умову Ліпшица в точці $x = 1$, якщо існують числа $\alpha > 0$, $M > 0$ такі, що

$$|f(t) - f(1)| \leq M |t - 1|^{\alpha} \quad \text{при } t \in [0,1].$$

Теорема 7. Для будь-якої $f \in C[0,1]$ функція $B_{\infty}(f, q; x)$, $q \in (0,1)$, є неперервною на $[0,1]$ та аналітичною в одиничному крузі $\{x : |x| < 1\}$. Якщо f задовольняє умову Ліпшица в точці 1, то $B_{\infty}(f, q; x)$ є диференційовною зліва в точці 1.

Наступний приклад [2] показує, що взагалі функція $B_{\infty}(f, q; x)$ може бути і не диференційовною в точці 1. Справді, коли взяти функцію

$f \in C[0,1]$, для якої $f(0) = f(1) = 0$, $f(1 - q^k) = 1/k \quad (k \in \mathbb{N})$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{B_{\infty}(f, q; x) - B_{\infty}(f, q; 1)}{x - 1} = \infty.$$

Дослідження операторів $B_n(f, q; x)$ у випадку $q \geq 1$ можна знайти, наприклад, в [3, 4]. Наведемо лише дві теореми.

Теорема 8. Нехай $q \geq 1$ – фіксоване дійсне число. Тоді для будь-якого многочлена $p(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(p, q; x) = p(x).$$

Теорема 9. Нехай $q \in (1, \infty)$. Тоді:

1) існує $f \in C^\infty[0,1]$ така, що $\{B_n(f, q; x)\}$ не збігається ні до якої фінітної функції на $[0,1]$;

2) існує $f \in C^\infty[0,1]$ така, що $\{B_n(f, q; x)\}$ збігається до розривної фінітної функції на $[0,1]$;

3) існує $f \in C^\infty[0,1]$ така, що $\{B_n(f, q; x)\}$ збігається рівномірно на $[0,1]$ до $g(x) \neq f(x)$.

Тепер сформулюємо теорему про асимптотичне подання $B_n(t^i, q; x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, за степенями $[n]_q$.

В [1] показано, що

$$B_n(t^i, q; x) = \sum_{j=0}^i \alpha_j(q, n) [n]_q^{j-i} S_q(i, j) x^j, \quad (5)$$

де

$$\alpha_j = \alpha_j(q, n) = \prod_{r=0}^{j-1} \left(1 - \frac{[r]_q}{[n]_q} \right); \quad (6)$$

функції $S_q(i, j)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$S_q(i+1, j) = S_q(i, j-1) + [j]_q S_q(i, j),$$

де $S_q(0, 0) := 1$, $S_q(i, 0) := 0$ при $i > 0$, $S_q(i, j) := 0$ при $i < j$.

Теорема 10. При фіксованому i q -многочлен Бернштейна $B_n(t^i, q; x)$ має таке асимптотичне подання

$$B_n(t^i, q; x) = \sum_{m=0}^i \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^i (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i, p) \sum_{(s_1, \dots, s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \dots [s_{p+m-i}]_q, \quad (7)$$

де сума $\sum_{(s_1, \dots, s_r)}^k [s_1]_q \dots [s_r]_q$ береться за всіма можливими комбінаціями

(s_1, \dots, s_r) з перших k чисел послідовності $1, 2, \dots, i-1$ по r чисел; крім того,

$$\sum_{(s_1, \dots, s_0)}^k [s_1]_q \dots [s_0]_q := 1, \text{ коли } k = -1, 0, 1, 2, \dots;$$

$$\sum_{(s_1, \dots, s_r)}^k [s_1]_q \dots [s_r]_q := 0, \text{ коли } r > k.$$

$$\text{Оскільки } S_q(i, i) = 1, \sum_{(s_1, \dots, s_0)}^{i-1} [s_1]_q \dots [s_0]_q = 1, \text{ то}$$

$$B_n(t^i, q; x) = x^i +$$

$$+ \sum_{m=1}^i \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^i (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i, p) \sum_{(s_1, \dots, s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \dots [s_{p+m-i}]_q. \quad (8)$$

Позначимо

$$A_m(i, q, x) := \sum_{p=i-m}^i (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i, p) \sum_{(s_1, \dots, s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \dots [s_{p+m-i}]_q.$$

Тоді рівність (8) набуває вигляду

$$B_n(t^i, q; x) = x^i + \sum_{m=1}^i \frac{A_m(i, q, x)}{[n]_q^m}, \quad (9)$$

де $A_m(i, q, x)$ не залежить від n .

З а у в а ж е н н я 1. При $i = 2$ з (9) одержуємо рівність (4).

З а у в а ж е н н я 2. Оскільки при фіксованому $q \geq 1$ з умови $n \rightarrow \infty$ випливає умова $[n]_q \rightarrow \infty$, то з (9) одержуємо теорему 8, як наслідок.

З а у в а ж е н н я 3. Якщо $\varphi(x)$ – многочлен, то при фіксованих n та q з (9) одержуємо, що

$$\deg B_n(\varphi(t), q; x) = \deg \varphi(x),$$

бо $A_m(i, q, x)$ є многочленом степеня $i - 1$ відносно x .

Література:

1. Phillips G. M., Bernstein polynomials based on the q -integers, *Ann. Numer. Math.* **4** (1997), 258–264.
2. П'инський А. and Ostrovska S., Convergence of generalized Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* **116** (2002), 100–112.
3. Oruc H. and Tuncer N., On the convergence and iterates of q -Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* **117** (2002), 301–313.
4. Ostrovska S., q -Bernstein polynomials and their iterates, *J. Approx. Theory* **123** (2) (2003), 232–255.

к.ф.-м.н. Панасенко О.Б., студентка Томчук І.М.

Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ЯК РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Розглядаються системи функціональних рівнянь,
розв'язками яких є неперервні фрактальні функції*

Об'єктивний розвиток математики привів до того, що останні три десятиліття різко зріс інтерес до вивчення об'єктів зі складною локальною будовою. Це трапилось після публікації монографії Б. Мандельброта «Фрактальна геометрія природи», в якій було систематизовано застосування теорії мір дробових порядків в різноманітних галузях людських знань. Тим самим «народилась» нова галузь математики – фрактальна геометрія, яка засобами теорії мір дробових порядків, метричних розмінностей досліджує об'єкти зі складною локальною будовою [1]. До таких об'єктів, зокрема, належать і неперервні функції зі складною локальною поведінкою. Це функції ніде не диференційовні та сингулярні. Саме засоби фрактальної геометрії дають можливості для вивчення властивостей таких відображень. Актуальність до їх ґрунтовного вивчення також зумовлена тим, що згідно з теоремами Банаха–Мазуркевича та Замфіреску множини таких відображень є дуже «багатими» відповідно в класі неперервних на відрізьку функцій та в класі функцій розподілу [2].

Незважаючи на значні успіхи при вивченні властивостей фрактальних множин та функцій, слід констатувати, що й досі триває методологія їх дослідження. Тривають пошуки нових інструментів, які могли б бути корисними для зручного означення таких об'єктів та аналізу їхніх фрактальних властивостей. Одним з можливих підходів в цьому напрямі може бути підхід до визначення фрактальних відображень з допомогою функціональних рівнянь та систем функціональних рівнянь, яким вони задовольняють.

Розглянемо деякі відомі приклади недиференційованих та сингулярних функцій та системи функціональних рівнянь, яким вони задовольняють.

Напевно одним з найпростіших прикладів неперервної функції без скінченної похідної є так звана функція Такагі–Ван дер Вардена [1], що означається в такий спосіб:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^n x), \quad (1)$$

де $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$ – відстань до найближчого цілого числа – періодична з періодом 1 функція, яка на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ дорівнює x , а на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ – $(1 - x)$.

Теорема 1. Функція $T(x)$ для $x \in [0, 1]$ задовольняє таку систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} T\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}T(x), \\ T\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}T(x). \end{cases} \quad (2)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція (1) задовольняє перше рівняння системи (2). Справді, нехай $x \in [0,1]$, тоді

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(2^n \frac{x}{2}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^{n-1}x) = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \varphi(2^{n-1}x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}T(x) \end{aligned}$$

(тут ми використали те, що при $x \in [0,1]$, $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$).

Аналогічно доведемо, що функція $T(x)$ задовольняє і інше рівняння системи:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(2^n \frac{1+x}{2}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{1+x}{2}\right)}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^{n-1} + 2^{n-1}x) = \\ &= \frac{1-x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^{n-1}x) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}T(x) \end{aligned}$$

(тут ми використали те, що при $x \in [0,1]$ $\frac{1+x}{2}$ належить відрізку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, а тому

$\varphi\left(\frac{1+x}{2}\right) = 1 - \frac{1+x}{2} = \frac{1-x}{2}$, а також періодичність функції $\varphi(x)$). Теорему доведено.

Теорема 2. В класі обмежених функцій існує рівно одна функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що періодична з періодом 1 і на відрізку $[0,1]$ задовольняє систему функціональних рівнянь (2) – це функція (1).

Доведення. Перепишемо систему (2) у такому вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}f(2x), & \text{якщо } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x + \frac{1}{2}f(2x-1), & \text{якщо } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Враховуючи періодичність функції f та означення функції $\varphi(x)$, подамо останнє співвідношення у ще коротшому вигляді, а саме:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}f(2x).$$

Тепер, застосовуючи останнє співвідношення і для $f(2^k x)$, $k \in \mathbb{N}$, дістанемо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{2} f(2x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \left(\varphi(2x) + \frac{1}{2} f(2^2 x) \right) = \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x) + \frac{1}{2^n} f(2^n x). \end{aligned}$$

Враховуючи обмеженість функції f , знаходимо, що при $n \rightarrow \infty$: $\frac{1}{2^n} f(2^n x) \rightarrow 0$, а тому обов'язково

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x).$$

Теорему доведено.

Таким чином, система функціональних рівнянь (2) є характеристичною для функції (1) в тому сенсі, що лише єдина обмежена функція їй задовольняє. Разом з тим, ця система функціональних рівнянь «носить» в собі певну інформацію і про самоафінні властивості графіка функції Такагі–Ван дер Вардена.

Розглянемо тепер деякі приклади сингулярних відображень. Сингулярною називають функцію, яка є монотонною і похідна якої майже скрізь дорівнює нулю.

Найвідомішими прикладами сингулярних функцій є функції Кантора, Мінковського, Салема [1,2,3].

Загальновідома функція Кантора, або «драбина Кантора» всебічно досліджувалась у статті [3], зокрема в цій роботі доведено таке твердження.

Теорема 3. Існує лише одна обмежена функція $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$, яка задовольняє системі функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}, \\ F\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 1 - \frac{F(x)}{2}, \\ F\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

причому це функція Кантора.

Функція Мінковського є прикладом строго зростаючої сингулярної функції. Це відображення Г. Мінковський побудував у 1904 році для встановлення взаємно однозначної відповідності між раціональними числами і квадратичними ірраціональностями чисел відрізка $[0,1]$ (сам Мінковський це відображення позначив $\varphi(x)$).

Означається функція Мінковського $\varphi(x)$ в такий спосіб. Покладемо

$\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Якщо $\frac{p}{q}$ і $\frac{p'}{q'}$ – два сусідні дроби в послідовності Фарея [4], то $\varphi\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{p}{q}\right) + \varphi\left(\frac{p'}{q'}\right)\right)$.

Аналітичне подання функції $\varphi(x)$ наступне (див. [1,2]). Якщо $x \in [0,1]$ має таке розвинення в ланцюговий дріб (скінченний або нескінченний):

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \equiv [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

де усі $a_k \in \mathbb{N}$, то

$$\varphi(x) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + \dots + (-1)^{n-1} 2^{1-(a_1+\dots+a_n)} + \dots$$

Зауважимо, що функція Мінковського володіє рядом цікавих властивостей:

- Функція Мінковського сингулярна, тобто майже в кожній точці $x \in [0;1]$ її похідна існує і дорівнює нулю. Тим самим, міра на $[0;1]$, функцією розподілу якої є функція Мінковського, сингулярна.
- Функція взаємно однозначно переводить раціональні числа на відріжку $[0;1]$ в двійково-раціональні числа на тому ж відріжку.
- Функція Мінковського взаємно однозначно переводить квадратичні ірраціональності (тобто числа виду $(a+\sqrt{b})$, де a і b - раціональні) на відріжку $[0;1]$ в раціональні числа на тому ж відріжку. Справді, число x є квадратичною ірраціональністю тоді і тільки тоді, коли його розклад в ланцюговий дріб, починаючи з деякого моменту, періодичний; з іншої сторони ця періодичність рівносильна періодичності двійкового запису образу.

Теорема 4. Функція Мінковського задовольняє функціональні рівняння

$$F\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{F(x)}{2}, \quad F(1-x) + F(x) = 1, \quad F\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}F(x).$$

Доведення. Наведемо тут лише доведення того, що функція Мінковського задовольняє перше функціональне рівняння. Нехай $x \in [0,1]$ має таке подання ланцюговим дробом $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Тоді очевидно, що

$\frac{1}{1+x} = [1, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Маємо:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{1+x}\right) &= 2^{1-1} - 2^{1-(1+a_1)} + 2^{1-(1+a_1+a_2)} - \dots + (-1)^n 2^{1-(1+a_1+\dots+a_n)} + \dots = \\ &= 1 - 2^{-1} \left(2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + \dots + (-1)^{n-1} 2^{1-(a_1+\dots+a_n)} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{2} \varphi(x). \end{aligned}$$

Функція Мінковського досліджувалась багатьма математиками. Системи функціональних рівнянь, якими визначається однозначно функція $f(x)$, висвітлив Гіргенсон в статті [5]. Зокрема, ним доведено такий результат:

Теорема 5. Існує лише одна обмежена функція $F : [0,1] \rightarrow R$, яка задовольняє системі функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{F(x)}{2}, \\ F\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{F(x)}{2}, \end{cases}$$

причому це функція Мінковського.

Література:

1. Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. К. : Наукова думка, 1992. – 208 с.
2. Працевитый М.В. Фрактальный подход у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працевитый. – К. : Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 1998. – 298 с.
3. Dovgoshey O. The Cantor function / O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen // Expo. Math 24 (2006). – P. 1–37.
4. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А.Бухштаб. – М. : Просвещение, 1966. – С. 243–248.
5. Girgenson R. Constructing singular functions via Farey fractions / R. Girgenson // J. Math. Anal. Appl. 203 (1996). – P.127–141.

студент Макаревич О.О., доц. Миронюк М.В.

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського

ВПЛИВ ОБЛАСТІ СУМУВАННЯ НА ОЦІНКУ КРАТНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СУМ

Розглянуто оцінку кратних тригонометричних сум в залежності від області сумування змінних

Кратною тригонометричною сумою за модулем q [4] будемо називати суму вигляду

$$S = S(q, F(x_1, \dots, x_r)) = \sum_{x_1=1}^q \dots \sum_{x_r=1}^q \exp\{2\pi i F(x_1, \dots, x_r) / q\}, \quad (1)$$

де q – натуральне число,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=1}^{n_1} \dots \sum_{t_r=1}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r};$$

де $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ – цілі числа.

Однократною тригонометричною сумою за модулем q [4]
називатимемо суму вигляду

$$S(q, f(x)) = \sum_{x_1=1}^q \exp\{2\pi i f(x)/q\} \quad (2)$$

де $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$ – многочлен з цілими коефіцієнтами.

Оцінки кратних тригонометричних сум виду (1) використовуються в ряді задач теорії чисел. Ці задачі об'єднані в дві групи: до першої групи відносяться асимптотичні формули для числа розв'язків складних систем діофантових рівнянь [4]; до другої групи відносяться питання про розподіл дробових частин многочленів або сукупності многочленів [2], [6]. Багатовимірні задачі мають багато специфічних особливостей, які відсутні в одновимірному випадку. Однією з таких особливостей є різноманітність областей, в яких можуть змінюватися змінні параметри, як основні, до яких відносяться x_1, \dots, x_r (наприклад, x_1, \dots, x_r належать паралелепіпеду, еліпсоїду, тощо), так і другорядні, до яких можна віднести t_1, \dots, t_r , наприклад, можна розглядати $F(x_1, \dots, x_r)$ виду

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1+\dots+t_r \leq n} \dots \sum \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Введемо деякі поняття. *Повна система рівнянь* має вигляд

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j y_{1j}^{t_1} \dots y_{rj}^{t_r} = 0, \quad 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r; \quad (3)$$

невідомі системи $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{rj}$ змінюються в межах

$$1 \leq x_{1j} \leq P_1, \quad 1 \leq x_{2j} \leq P_2, \dots, \quad 1 \leq x_{rj} \leq P_r.$$

Будемо вважати (що ніяк не обмежує загальності) справедливим таке співвідношення: $1 < P_1 = \min(P_1, P_2, \dots, P_r)$.

Через $J = J(P; n, k, r)$ позначатимемо число розв'язків системи (3) (скорочено писатимемо \bar{P} , що означає вектор $\bar{P} = (P_1, P_2, \dots, P_r)$).

Якщо в системі (3) опущені деякі рівняння, то систему, що знов утворилася, називатимемо *неповною*.

Через $F((x_1, \dots, x_r))$ позначатимемо многочлен наступного вигляду:

$$F((x_1, \dots, x_r)) = F_A((x_1, \dots, x_r)) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \dots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

де $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ – дійсні числа і одночлени $\alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}$; впорядковані в порядку зростання чисел $t_1 + (n_1 + 1)t_2 + (n_1 + 1)(n_2 + 1)t_3 + \dots + (n_1 + 1) \dots (n_{r-1} + 1)t_r$, A — вектор, координатами якого є коефіцієнти многочлена $F((x_1, \dots, x_r))$ в порядку їх входження в $F((x_1, \dots, x_r))$.

Нехай $n_1, \dots, n_r, P_1, \dots, P_r$, – натуральні числа:

$$P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r; \quad m = (n_1 + 1) \dots (n_r + 1), \quad n = \max(n_1, \dots, n_r), \quad n \geq 2;$$

$$\tau(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1-1/6} P_2^{t_2} \dots P_r^{t_r},$$

де $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r, t_1 + \dots + t_r \geq 1$

$$S_r(A) = \sum_{x_1 \leq P_1} \dots \sum_{x_r \leq P_r} \exp\{2\pi i t F(x_1, \dots, x_r)\}, \quad S(A) = S_1(A).$$

Через Ω позначатимемо одиничний m -вимірний куб ($m = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_r + 1)$) в m -вимірному евклідовому просторі наступного вигляду:

$$0 \leq \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r.$$

Розіб'ємо точки куба Ω на два класи Ω_1 і Ω_2 . Для цього визначимо спочатку область $\Omega(a, q)$ таким чином: точку A з координатами $a(t_1, \dots, t_r)$ віднесемо до області $\Omega(a, q)$, якщо

$$a(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \beta(t_1, \dots, t_r),$$

де $0 \leq a(t_1, \dots, t_r) < q(t_1, \dots, t_r), (a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1$

і

$$|\beta(t_1, \dots, t_r)| \leq P_1^{-t_1} \dots P_r^{-t_r} P^{0,1}, \quad 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r.$$

Позначимо через Q найменше спільне кратне чисел $q(t_1, \dots, t_r)$. Таким чином, кожній області $\Omega(a, q)$ відповідає своє Q . В перший клас Ω_1 віднесемо ті області $\Omega(a, q)$, для яких $Q < P^{0,1}$. Оскільки модуль суми $S = S(A)$ не залежить від величини вільного члена $\alpha(0, \dots, 0)$ многочлена $F(x_1, \dots, x_r)$, то надалі вважатимемо його рівним нулю.

Тобто до першого класу Ω_1 віднесемо точки A , координати яких задовольняють умовам:

а) $\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{\alpha(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \beta(t_1, \dots, t_r), (a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1,$

$$0 \leq a(t_1, \dots, t_r) < q(t_1, \dots, t_r), |\beta(t_1, \dots, t_r)| \leq P_1^{-t_1+0,1} P_2^{-t_2} \dots P_r^{-t_r};$$

б) найменше спільне кратне Q всіх чисел $q(t_1, \dots, t_r)$ не перевищує $P_1^{0,1}$.

Решта точок куба Ω віднесемо до другого класу Ω_2 . Залежно від того, до якого класу належить точка A , можна оцінити суму $S(A)$.

Відзначимо, що виведення цієї оцінки розпадається на два істотно різних випадки залежно від D -наближення координат точки A . Відповідно до цього клас Ω_2 розпадається на дві області ω_1 і ω_2 .

Лема. [1] Нехай $D(\sigma)$ – кількість цілочисельних наборів (x_1, \dots, x_r) , що задовольняють умови

$$\{F(x_1, \dots, x_r)\} < \sigma, \quad 1 \leq x_1 \leq P_1, \dots, 1 \leq x_r \leq P_r.$$

Подамо величину $D(\sigma)$ у вигляді

$$D(\sigma) = \sigma P_1 \dots P_r + \lambda(\sigma).$$

Тоді маємо наступні оцінки:

1) Якщо точка A належить першому класу Ω_1 , то

а) $|S(A)| \ll P_1 \dots P_r Q^{\frac{1}{n} + \varepsilon}$;

б) при $\delta > 1$ $|S(A)| \ll P_1 \dots P_r (Q\delta)^{\frac{1}{n} + \varepsilon}$.

2) Якщо точка A належить області ω_1 з Ω_1 , то

$$|S(A)| \ll P_1 \dots P_r \delta^{-\frac{1}{n} + \varepsilon} \ll P_1 \dots P_r P_1^{-0,05n^{-1}}$$

3) Якщо точка A належить області ω_2 з Ω_2 , то

$$|S(A)| \ll P_1 \dots P_r \ll P_1 \dots P_r P_1^{-\rho} \exp\{32\chi\}$$

Сталі в знаках \ll залежать тільки від n , r і ε .

Доведення див. у [1].

Розглянемо тепер більш складнішу область сумування, ніж паралелепіпед, і покажемо, як в цьому випадку оцінюються кратні суми, які при цьому отримуються асимптотичні формули для числа розв'язків повної системи рівнянь. Область E_r , з якою ми будемо мати справу, має вигляд

$$e_r x_1^{s_1} + \dots + e_r x_r^{s_r} \leq P_0, \quad 1 \leq x_1 \leq P_1, \dots, \quad 1 \leq x_r \leq P_r,$$

де e_1, \dots, e_r дорівнюють 0 або 1, s_1, \dots, s_r – натуральні числа, при чому $s_1 \leq n_1, \dots, s_r \leq n_r$, числа P_1, \dots, P_r такі, що якщо $e_j = 1$, то $P_j^{s_j} = P_0$.

Нехай $\chi(x_1, \dots, x_r)$ – характеристична функція області E_r , тобто

$$\chi(x_1, \dots, x_r) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x_1, \dots, x_r) \in E_r \\ 0, & \text{якщо } (x_1, \dots, x_r) \notin E_r \end{cases}$$

Позначимо через $T(A)$ тригонометричну суму, в якій змінні сумування належать області E_r ,

$$T(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \dots \sum_{x_r=1}^{P_r} \chi(x_1, \dots, x_r) \exp\{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)\}.$$

Теорема. [5] Нехай точка A належить класу Ω_1 . Тоді має місце оцінка

$$|T(A)| \leq 2(5n^{2n})^{v(Q)} (\tau(Q))^{r-1} P_1 \dots P_r Q^{-v}.$$

Нехай точка A належить класу Ω_2 . Тоді при $Q_0 \geq P^{\frac{1}{6}}$ має місце оцінка

$$|T(A)| \leq 2^{32x} P_1 \dots P_r P^{-\rho}, \quad \rho = (32m\chi \log(8m\chi))^{-1}.$$

Якщо ж $Q_0 < P^{1/6}$, тоді для $T(A)$ маємо

$$|T(A)| \leq (5n^{2n})^{v(Q_0)} (\tau(Q_0))^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-v/10} + 2^{16r} (rv^{-1})^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-v/16}.$$

Доведення див. у [5].

Тригонометричні суми з однією змінною сумування на сьогодні вже достатньо вивчені, хоч і тут залишається ще багато важливих невирішених проблем. Теорія кратних тригонометричних сум значно багатша; у ній є цілий ряд нових ефектів, пов'язаних з великою різноманітністю областей, в яких

змінні сумування рівноправні або загального вигляду. Над їх дослідженнями працюють такі вчені як Г.І. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н.Чубариков та інші. Таким чином, можемо зробити висновок, що теми знаходження оцінок різних тригонометричних сум, розроблення методик для їх оцінок, а також дослідження асимптотичних задач теорії чисел ще довгий час будуть залишатися актуальними.

Література:

1. Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм / Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 368 с.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / И. М. Виноградов. – М.: Наука, 1980. – 248 с.
3. Виноградов И. М. Варианты метода тригонометрических сумм / И. М. Виноградов. – М.: Наука, 1976. – 117 с.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел: Второе издание перераб. и доп. / Карацуба А.А. – М.: Наука, 1983. – 239 с.
5. Чубариков В. Н. Асимптотическая формула среднего значения кратной тригонометрической суммы / В. Н. Чубариков //Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, № 6. – С.799–816.
6. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел / Хуа Ло-ген // М.: Наука, 1964, – 276 с.

доц. Краєвський В.О., магістрант Краєвський С.О., студент Павлюк О.І.
Вінницький національний технічний університет

УЗАГАЛЬНЕННЯ СТРУКТУРИ ТЕНЗОРНОЇ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ІЗ ВРАХУВАННЯМ „ПАМ'ЯТІ НАПРЯМІВ”

У роботі на основі гіпотези, що раптова зміна напрямку деформування супроводжується поступовим поворотом головних напрямів тензора пошкодження, побудована структура тензорно-лінійної моделі з врахуванням "пам'яті напрямів" для випадку багатоетапної зміни напрямку холодного пластичного деформування

Для побудови тензорної моделі накопичення пошкодження у роботі [1] висувається гіпотеза, що раптова зміна напрямку деформування супроводжується поступовим поворотом головних напрямів тензора пошкодження. І в результаті головні напрями тензора накопичення пошкодження та головні напрями тензора приростів деформацій стають співісними тільки після накопичення певного ступеня пластичної деформації. На основі цієї гіпотези у роботі [2] побудовано структуру тензорно-лінійної моделі із врахуванням "пам'яті напрямів" для випадку двоетапної зміни напрямку холодного пластичного деформування. Як показала перевірка адекватності запропонованої

моделі [3], врахування „пам'яті напрямів” сприяє кращій кількісній та якісній відповідності експериментальним даним двоетапного деформування, особливо у випадку, коли косинус зламу траєкторії деформування менший за нуль.

Метою цієї роботи є узагальнення структури тензорно-лінійної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням "пам'яті напрямів" на випадок багатоетапної зміни напрямку холодного пластичного деформування.

Під багатоетапним деформуванням розуміється процес, який можна розбити на окремі етапи, в межах яких деформування є стаціонарним. У цьому випадку компоненти напрямного тензора накопичення пошкоджень змінюються за законом [3]

$$\beta_{ij}(\varepsilon_u) = \begin{cases} \beta_{ij}^{(1)}, 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(1)}; \\ \beta_{ij}^{(12)}, \varepsilon_u^{(1)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(1)}; \\ \beta_{ij}^{(2)}, \varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(1)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(2)}; \\ \beta_{ij}^{(23)}, \varepsilon_u^{(2)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(2)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(2)}; \\ \dots \\ \beta_{ij}^{(m-1)}, \varepsilon_u^{(m-2)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-2)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(m-1)}; \\ \beta_{ij}^{(m-1,m)}, \varepsilon_u^{(m-1)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_u^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)}; \\ \beta_{ij}^{(m)}, \varepsilon_u^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)} \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_*, \end{cases} \quad (1)$$

де $\beta_{ij}^{(r)}$ –напрямний тензор приростів деформацій на r -ому етапі; $\beta_{ij}^{(r,r+1)}$ – напрямний тензор, що визначає положення головних напрямів тензора накопичення пошкоджень при їх повороті від напрямку, який збігається із головними напрямками тензора приростів деформацій на r -ому етапі деформування, до напрямку, який збігається із головними напрямками тензора приростів деформації на $(r+1)$ -ому етапі деформування. $\beta_{ij}^{(r,r+1)}$ подамо як лінійну комбінацію напрямних тензорів

$$\beta_{ij}^{(r,r+1)} = \frac{(1 - \delta^{(r)}) \cdot \beta_{ij}^{(r)} + \delta^{(r)} \cdot \beta_{ij}^{(r+1)}}{\sqrt{(1 - \delta^{(r)})^2 + 2 \cdot \delta^{(r)} \cdot (1 - \delta^{(r)}) \cdot k_{r,r+1} + \delta^{(r)2}}}; \quad (2)$$

$$\delta^{(r)} = \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_u^{(r)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}}; \quad \varepsilon_u^{(r)} = \sum_{q=1}^r \varepsilon_u^{(q)} + \sum_{q=1}^{r-1} \Delta\varepsilon_{кр}^{(q)}; \quad \Delta\varepsilon_{кр}^{(r)} = \varepsilon_c^{(r+1)} \cdot \frac{a}{e \cdot \left(\frac{\varepsilon_c^{(r)}}{\varepsilon_u^{(r)}}\right)^{2a}}, \quad (3)$$

де $\varepsilon_u^{(q)}$ – накопичена деформація на r -ому етапі; ε_c^* – накопичена до руйнування деформація; $\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}$ – ступінь накопиченої пластичної деформації на $(r+1)$ -ому етапі, по досягненні якого головні напрями тензорів накопичення пошкоджень та приростів пластичних деформацій стають співвісними; a –

параметр, що залежить від матеріалу.

Якщо руйнування досягається на кінець m -го етапу, то умова руйнування матиме вигляд [3]

$$\sum_{q=1}^m g_q \sum_{r=1}^m g_r k_{qr} = 1, \quad (4)$$

де

$$g_1 = f(\varepsilon_u^{(1)}, \varepsilon_{*1}) - f(0, \varepsilon_{*1}) + \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{kp}} \frac{(1 - \delta^{(1)})}{\sqrt{(1 - \delta^{(1)})^2 + 2 \cdot \delta^{(1)} \cdot (1 - \delta^{(1)}) \cdot k_{12} + \delta^{(1)2}}} \cdot F(\varepsilon_u; \eta^{(2)}; \mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u; \quad (5)$$

$$g_r = f(\varepsilon_H^{(r)}, \varepsilon_{*c}^{(r)}) - f(\varepsilon_H^{(r-1)} + \Delta\varepsilon_{kp}^{(r-1)}, \varepsilon_{*c}^{(r)}) + \int_{\varepsilon_H^{(r-1)}}^{\varepsilon_H^{(r-1)} + \Delta\varepsilon_{kp}^{(r-1)}} \frac{\delta^{(r-1)}}{\sqrt{(1 - \delta^{(r-1)})^2 + 2 \cdot \delta^{(r-1)} \cdot (1 - \delta^{(r-1)}) \cdot k_{(r-1,r)} + \delta^{(r-1)2}} \times \times F(\varepsilon_u; \eta^{(r)}; \mu_\sigma^{(r)}) \cdot d\varepsilon_u + \int_{\varepsilon_H^{(r)}}^{\varepsilon_H^{(r)} + \Delta\varepsilon_{kp}^{(r)}} \frac{\delta^{(r)}}{\sqrt{(1 - \delta^{(r)})^2 + 2 \cdot \delta^{(r)} \cdot (1 - \delta^{(r)}) \cdot k_{(r,r+1)} + \delta^{(r)2}} \times \quad (6)$$

$$\times F(\varepsilon_u; \eta^{(r+1)}; \mu_\sigma^{(r+1)}) \cdot d\varepsilon_u,$$

$$r = 2, m-1;$$

$$g_m = f(\varepsilon_{*c}^{(m)}, \varepsilon_{*c}^{(m)}) - f(\varepsilon_H^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{kp}^{(m-1)}, \varepsilon_{*c}^{(m)}) + \int_{\varepsilon_H^{(m-1)}}^{\varepsilon_H^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{kp}^{(m-1)}} \frac{\delta^{(m-1)}}{\sqrt{(1 - \delta^{(m-1)})^2 + 2 \cdot \delta^{(m-1)} \cdot (1 - \delta^{(m-1)}) \cdot k_{(m-1,m)} + \delta^{(m-1)2}} \cdot F(\varepsilon_u; \eta^{(m)}; \mu_\sigma^{(m)}) \cdot d\varepsilon_u, \quad (7)$$

де $f(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}(\eta, \mu_\sigma))$ – функція пошкодженості; $F(\varepsilon_u, \eta, \mu_\sigma) = \frac{df}{d\varepsilon_u}$ – додатна

функція, яка залежить від характеристик матеріалу; $\varepsilon_{*c}^{(r)} = \varepsilon_{*c}(\eta^{(r)}; \mu_\sigma^{(r)})$ – значення граничної деформації з діаграми пластичності для r -ого етапу, напружено-деформований стан якого характеризується параметрами $\eta^{(r)}$ та $\mu_\sigma^{(r)}$; $k_{qr} = \beta_{ij}^{(q)} \cdot \beta_{ij}^{(r)}$ – косинус зламу траєкторії деформування.

Якщо r -й етап розпочався до завершення повороту головних напрямів тензора накопичення пошкоджень, тоді косинус зламу траєкторії

$$k_{(r-1,r)} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}}\right) \cdot \beta_{ij}^{(r-2)} + \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}} \cdot \beta_{ij}^{(r-1)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}}\right)^2 + 2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}} \cdot k_{(r-2,r-1)} + \left(\frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{kp}^{(r-2)}}\right)^2}} \cdot \beta_{ij}^{(r)}. \quad (8)$$

Якщо руйнування на останньому етапі відбувається до повороту головних напрямів тензора накопичення пошкоджень, тоді

$$g_m = \int_{\varepsilon_n^{(m-1)}}^{\varepsilon^*} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2 \cdot \delta \cdot (1-\delta) \cdot k_{(m-1,m)} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u; \eta^{(m)}; \mu_\sigma^{(m)}) \cdot d\varepsilon_u. \quad (9)$$

Висновки: Узагальнена структура тензорно-лінійної моделі з врахуванням "пам'яті напрямів" на випадок багатоетапної зміни напрямку холодного пластичного деформування. Розглянуті окремі випадки, коли деякі етапи починаються і руйнування на останньому етапі відбувається до завершення повороту головних напрямів тензора накопичення пошкоджень.

Література:

1. Михалевич В. М. Тензорно-лінійна модель з врахуванням «пам'яті напрямів» при двохступеновому деформуванні / В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, В. О. Краєвський, К. Є. Козлов // В зб.: «Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні (Донбаська державна машинобудівна академія). – Краматорськ-Хмельницький: ДДМА. – 2002. – С. 13-15.

2. Михалевич В. М. Розробка структури тензорно-лінійної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам'яті напрямів» / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // В зб.: «Застосування теорії пластичності в сучасних технологіях обробки тиском і автотехнічних експертизах». – Вінниця: ВНТУ. – 2006. – С. 97-99.

3. Михалевич В.М. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні та ротаційній витяжці: Монографія / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с.

доц. Боровікова Т.Ф., студент Швець Д.С.

Вінницький інститут конструювання одягу та підприємництва

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ

Авторами розглянуто декілька математичних моделей сфери економіки у виробничих процесах. Математичні моделі важливо використовувати в аналізі ринкових характеристик конкурентних товарів, контролі виробничих запасів, обліку реалізації в системі управління рухом товарів і валовими доходами торговельного підприємства, тощо

Математична модель – це універсальний інструмент пізнання, що знаходиться між логічним мисленням та об'єктивною дійсністю. Вона на основі відображення попереднього досвіду дає можливість знаходити оптимальний варіант управлінського рішення для скерування розвитку економічного об'єкту,

виробничого процесу чи господарської ситуації на досягнення поставленої мети. Прийняття рішення здійснюється на всіх рівнях організаційної структури управління і є його найважливішою функцією. Управління спрямоване на розв'язання проблемних ситуацій. Проблема ситуація виникає там, де може бути зафіксовано два стани – фактичний і бажаний, а розв'язання цієї ситуації полягає в виробленні рішення для ліквідації розходжень між ними. Методи пошуку розв'язку проблемної ситуації дозволяють приймати науково обґрунтовані рішення і за умов певної невизначеності.

Епоха застосування математичних моделей до економічних задач розпочалася після другої світової війни. Поява та розповсюдження ЕОМ зробила можливим використання математичних моделей для розв'язування економічних задач, починаючи від перевезення одного продукту в масштабах району і закінчуючи моделюванням національної економіки. Якщо модель побудована і її створювачі вірять в її адекватність, то вона використовується для вирішення різних задач – прогнозування та прийняття простих і складних рішень та проблем.

Ефективність використання інструментарію економіко-математичного аналізу в дослідженнях економічних процесів підтверджена світовою практикою. Створилася нова галузь математики – математична економіка, яка охоплює різні рівні економічних досліджень:

- макроекономічні процеси вивчають і аналізують економіку як цілісну систему, динаміку її розвитку, залежності між параметрами, які характеризують її стан;
- дослідження спрямовані на вивчення окремих елементів економічної системи (галузі, об'єднання, підприємства, фірми тощо), які трансформують виробничі ресурси у готову продукцію;
- дослідження у математичній економіці стосується числового аналізу окремих економічних ситуацій, які виникають у процесі трансформації виробничих ресурсів у готову продукцію.

Усім ситуаціям, які мають місце на різних рівнях економічної системи, властива обмеженість ресурсів для досягнення поставленої мети. Щоб відшукати шляхи їх успішного розвитку, необхідно провести експериментальні дослідження та розрахунки. Очевидним є те, що експериментування з економічними системами недоцільне, тому єдиним науково обґрунтованим засобом досліджень є математичне моделювання – найефективніший із кількісних методів аналізу ефективності управлінських рішень.

Для кращого розуміння сутності економічних моделей, зробимо деталізований огляд деяких з них.

Л.В. Канторович проаналізував деякі задачі планування виробництва та сформулював новий важливий для економіки клас математичних задач, в яких розглядається питання пошуку найкращого (оптимального) розв'язку. Серед оптимізаційних задач дуже відомими є задачі *лінійного програмування*. Задачами лінійного програмування є такі оптимізаційні задачі, в котрих цільова функція і функціональні обмеження (лінійні функції) приймають будь-які значення з деякої множини. Стандартна задача лінійного програмування

записується у вигляді:

$$F(x) = \sum_{i=1}^k c_i x_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^k a_{ji} x_i \leq b_j, j = 1, \dots, m; \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

В задачі лінійного програмування нестрогі функціональні нерівності можна перетворити в строгі рівності, додаючи невідомі невід'ємні додаткові змінні. Звичайно, число невідомих і число рівнянь в системі може бути різним. Але й в цьому випадку для системи рівнянь відомі можливі варіанти: система може бути несумісною, тобто не мати розв'язків взагалі; розв'язок може бути один, але цей єдиний розв'язок може виявитися неприпустимим із-за наявності від'ємних компонент в розв'язанні; розв'язків може бути безліч. Для задач лінійного програмування розроблені багаточисельні ефективні методи розв'язання і відповідне математичне забезпечення для різноманітних ситуацій.

Для розв'язку задач лінійного програмування використовується декілька методів, серед яких найбільш розповсюдженими є симплекс-метод та графічний метод. Різновидом моделі лінійного програмування є транспортна задача, яка представляє найбільший інтерес в сучасному малому бізнесі. Підприємець, нехтуючи побічними факторами, може легко побудувати дану модель і тим самим збільшити прибуток та мінімізувати витрати палива та робочого часу на перевезення.

На практиці в сферах фінансів, маркетингу та інвестування дуже часто виникає проблема раціонального розподілу якихось ресурсів (капіталовкладень, товару, тощо). Щоб прийняти вірне рішення щодо оптимального розподілу ресурсів застосовується математична модель *динамічного програмування*. Динамічне програмування використовується для дослідження багатоетапних процесів. На кожному етапі знаходять умовно оптимальне управління при будь-яких передбаченнях про результати попереднього кроку. Коли процес доходить до кінцевого стану, знову проходять всі етапи, але вже з множини умовних оптимальних управлінь обирається одне найкраще.

В простому випадку задача динамічного програмування може вирішуватися наступним чином. Нехай є n функцій з невід'ємними значеннями $f_1(x_1)$, $x_1 \in d_1, \dots, f_n(x_n)$, $x_n \in d_n$, де d_1, \dots, d_n – області визначення змінних. Потрібно знайти максимум (або мінімум) функції $F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$ при деяких обмеженнях на змінні x_1, \dots, x_n . В найпростішому випадку обмеження одне (невід'ємність змінних): $x_1 + x_2 + \dots + x_n = A$. Схема дій буде наступною: знаходимо $F_{12}(A) = \max[f_1(x) + f_2(A-x)]$, далі $F_{123}(A) = \max[F_{12}(x) + f_3(A-x)]$ і так далі, а $\max F(x_1, \dots, x_n) = F_{12\dots n}(A) = \max[F_{12\dots n-1}(x) + f_n(A-x)]$.

Що стосується динамічного програмування, то це приклад розподілу капіталовкладень.

Наступна математична модель – *модель управління запасами*. Вона використовується для визначення часу розміщення замовлень на ресурси та їх

кількості, а також маси готової продукції. Будь-яка організація повинна підтримувати деякий рівень запасів для запобігання затримок на виробництві і в збуті. Ціль даної моделі – зведення до мінімуму негативних наслідків накопичення запасів, що виражається в певних витратах. Підприємцю завжди потрібно піклуватися про те, щоб витрати на зберігання продукції були в розумних межах. Вона застосовується для вирішення проблемних ситуацій на підприємствах практично всіх галузей.

Головний висновок може бути таким, що незалежно від обраної професії, незалежно від життєвої ситуації людина повинна приймати раціональні рішення та знаходити розв'язок тої чи іншої задачі. Для того щоб запобігти помилок і отримати необхідну користь, потрібно розуміти весь процес прийняття рішення. Сучасні умови конкуренції в економічних відносинах ініціюють появу економістів нової формації, що здатні самостійно вирішувати економічні проблеми, володіють інструментарієм генерування заходів щодо підвищення ефективності управління підприємствами і установами.

Отже, методи науки управління підвищують якість розв'язків економічних задач, що приймаються за рахунок використання наукового підходу, системної орієнтації та в більшій мірі математичних моделей.

Література:

1. Михайлов А.П. «Математическое моделирование; Идеи. Методы. Примеры». М.; ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Светов Б.Я., Яковлев С.Я. «Моделирование систем», М., 1985
3. Трояновский В.М. «Математическое моделирование в менеджменте». Учебное пособие - М.: Российская деловая литература, 2004.
4. Акулич І.Л., Стрельчонок В.Ф. «Математические методы и компьютерные технологии решения оптимизационных задач», Рига, 2006.
5. М. Еддоус, Р. Стенсфильд «Методы принятия решений», 2003.

*к. ф.-м. н., старший викладач Бак С.М., студент Сандульська О.С.
Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського*

МЕТОД УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

За допомогою методу умовної мінімізації отримано умови існування періодичних розв'язків для системи осциляторів зі степеневим потенціалом, розміщених на двовимірній решітці та вказано процедуру їх побудови

Розглядаються рівняння руху системи осциляторів, розміщених на двовимірній решітці:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) -$$

$$-b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), (n, m) \in \square^2. \quad (1)$$

При цьому розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

В статтях [1-4] вивчалися періодичні розв'язки для ланцюгів осциляторів, а в статті [5] – періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірній решітці з дещо іншою взаємодією між осциляторами та іншими методами.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді

$$U_{n,m}(r) = -\frac{c_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r)$$

і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_n(q_n), (n, m) \in \square^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (4)$$

де $(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$, а нелінійний оператор $B - (B(q))_{n,m} = U'(q_{n,m})$, в просторі дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком $(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{(n,m) \in \square^2} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}$. Позначимо цей простір $l_{2,2}$.

Скалярний добуток і норму в $l_{2,2}$ позначатимемо (\cdot, \cdot) і $\|\cdot\|$ відповідно.

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

функція $V(r)$ неперервно диференційовна, $V(0) = 0$ і $V'(r) = o(r)$, при $r \rightarrow 0$ та існує таке $\mu > 2$, що $0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, r \neq 0$.

Розглядаються потенціали виду

$$V_{n,m}(r) = \frac{d_{n,m}}{p} |r|^p, \quad (5)$$

де $d_{n,m} > 0, p > 2$. Передбачається, що існує таке натуральне N , що $a_{n+N,m} = a_{n,m}, c_{n+N,m} = c_{n,m}$ і $d_{n+N,m} = d_{n,m}$. Тоді рівняння (1) прийме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n,m}q_{n+1,m} + a_{n-1,m}q_{n-1,m} + b_{n,m}q_{n,m} - d_{n,m} |q_{n,m}|^{p-2} q_{n,m}, (n, m) \in \square^2. \quad (6)$$

Таким чином, система може розглядатися як диференціальне рівняння в $l_{2,2}$ виду (4) з обмеженим самоспряженим лінійним оператором A і обмеженим неперервним нелінійним оператором

$$(B(q))_{n,m} = d_{n,m} |q_{n,m}|^{p-2} q_{n,m}.$$

Надалі передбачається, що виконується наступна умова додатності:

(P) Оператор A додатно визначений, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що $(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2$.

Розглянемо функціонал

$$\Phi(u) = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{u}(t)\|^2 + \frac{1}{2} (Au(t), u(t)) - \frac{1}{p} \sum_{(n,m) \in \square^2} d_{n,m} |u_{n,m}(t)|^p \right\} dt,$$

який визначений на просторі X_T – підпросторі T -періодичних функцій із $H_{loc}^1(\square; L_{2,2})$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q, p)_T = \int_{-T/2}^{T/2} [(q(t), p(t)) + (\dot{q}(t), \dot{p}(t))] dt.$$

Функціонал Φ неперервно диференційовний за Фреше і

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} [(u, \dot{v}) + (Au, v) - (B(u), v)] dt, \quad (7)$$

для будь-якого $v \in X_T$. Його критичні точки є розв'язками задачі (6), (2).

Розглянемо функціонали

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\|\dot{u}\|^2 + (Au, u)] dt, \quad S(u) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{(n,m) \in \square^2} d_{n,m} |u_{n,m}(t)|^p \right) dt.$$

Відмітимо, що $\Phi(u) = \Psi(u) - S(u)$.

Для будь-якого $\theta > 0$ розглянемо задачу мінімізації

$$I_\theta = \inf \{ \Psi(v) : v \in X_T, S(v) = \theta \}. \quad (8)$$

Основний результат:

Теорема 1. Нехай u – розв'язок задачі (8). Тоді $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ є T -періодичним розв'язком задачі (1), (2) з потенціалом (5).

Теорема 2. В зроблених припущеннях для будь-якого $T > 0$ задача (8) має розв'язок $u \in X_T$. Більше того, існує таке $T_0 > 0$, що $u \neq \text{const}$ при $T \geq T_0$.

Література:

1. Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. – №9. – С.13-16.
2. Бак С.М. Побудова періодичних розв'язків для ланцюга осциляторів зі степеневим потенціалом / С.М. Бак, О.С. Сандульська // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти. – 2010. – С. 14-18.
3. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization //Physica D. - 1997. - 103. - P. 201-250.
4. MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators //Nonlinearity. – 1994. – P.1623 – 1643.
5. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. - 1998.-Volume 377.-P. 118-122.

доц. Тимошенко О.З., студент Мира Д.В.

Вінницький державний педагогічний університет ім. М.Коцюбинського

КЛАС ГАЛІЛЕЄВО-ІНВАРІАНТНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Коло питань математичної фізики тісно пов'язане з вивченням різних фізичних процесів. Сюди відносять явища, що вивчають у електродинаміці, фізиці елементарних частинок і т.д. Диференціальні рівняння, що описують фізичні процеси, як правило мають широку симетрію. Наявність симетрії може бути одним з критеріїв вибору оптимальної математичної моделі серед деякої множини рівнянь

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda_1 \vec{H} + \lambda_2 \{ \vec{E} + [\dot{\vec{x}} \vec{H}] \} + \lambda_3 \{ [\vec{H} \vec{E}] + \dot{\vec{x}} H^2 - \vec{H} (\dot{\vec{x}} H) \} \quad (1.1)$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – координати частинки, (\vec{E}, \vec{H}) – електромагнітне поле.

При сталих коефіцієнтах λ_i , $i = \overline{1,3}$ рівняння (1.1) можна розглядати як узагальнення рівнянь Ньютона-Лоренца. Надалі, при доведенні теореми будемо використовувати інфітезимальні оператори першого порядку вигляду

$$Q_2 = \xi^\mu(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^{1k}(t, \vec{x}, \vec{E}, \vec{H}) \frac{\partial}{\partial H_k} + \eta^{2k}(t, \vec{x}, \vec{E}, \vec{H}) \frac{\partial}{\partial E_k}, \mu = \overline{1,3}, \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} \eta^{1k} &= H_b f^{kb} + E_b g^{kb}, \\ \eta^{2k} &= H_b \varphi^{kb} + E_b \psi^{kb}, \quad kb = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

функції f^{kb} , g^{kb} , φ^{kb} , ψ^{kb} залежать від t, \vec{x} , тобто допускається, що функції η^{1k} , η^{2k} лінійні по \vec{E} і \vec{H} .

Відомо, що рівняння

$$m\ddot{\vec{x}} = e\{ \vec{E} + [\vec{H}\dot{\vec{x}}] \}, \quad (1.3)$$

яке описує рух зарядженої елементарної частинки в зовнішньому електромагнітному полі (\vec{E}, \vec{H}) , для якого, як відомо, виконується принцип відносності Галілея. До такого виду систем звичайних диференціальних рівнянь можна віднести і рівняння:

$$m\ddot{\vec{x}} = e\{ \vec{H} + [\vec{E}\dot{\vec{x}}] \}, \quad (1.4)$$

В класі диференціальних операторів (1.2). Рівняння (1.4) має максимальну алгебру інваріантності $AG(1,3)$ з базисними елементами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, P_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (1.5)$$

$$I_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b} + E_b \frac{\partial}{\partial E_a} - E_a \frac{\partial}{\partial E_b} + H_b \frac{\partial}{\partial H_a} - H_a \frac{\partial}{\partial H_b}, \quad (1.6)$$

$$a, b = \overline{1,3}, \quad a \neq b$$

$$G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a} - \varepsilon_{abc} E_c \frac{\partial}{\partial H_b}, \quad a, b, c = \overline{1,3} \quad (1.7)$$

і операторами дилатації, де

$$D_1 = x_a \frac{\partial}{\partial x_a} + H_a \frac{\partial}{\partial H_a}, \quad (1.8)$$

$$D_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - 2E_a \frac{\partial}{\partial E_a} - 3E_a \frac{\partial}{\partial E_a}, \quad a, b = \overline{1,3} \quad (1.9)$$

Інформація про симетричні властивості рівнянь (1.1) в класі операторів (1.2) дають теореми 1 – 7.

Теорема 1.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1.1), де $\lambda_i \neq 0$ і $i = \overline{1,3}$ в класі диференціальних операторів першого порядку (1.2), є алгебра Лі $AG(1,3)$, базисні елементи якої задаються формулами (1.5) - (1.7).

Теорема 2.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1.1), де $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, в класі операторів (1.2) є алгебра Галілея $AG(1,3)$, базисні елементи якої мають вигляд (1.5), (1.6).

Теорема 3.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1.1), де $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, в класі операторів (1.2) є алгебра Лі, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, P_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \\ G_a &= t \frac{\partial}{\partial x_a} - \varepsilon_{abc} H_c \frac{\partial}{\partial E_b}, \\ I_{ab} &= x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b} + H_b \frac{\partial}{\partial H_a} - H_a \frac{\partial}{\partial H_b} + E_b \frac{\partial}{\partial E_a} - E_a \frac{\partial}{\partial E_b}, \\ D &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - 2H_a \frac{\partial}{\partial H_a} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} H_a \frac{\partial}{\partial E_a} - 3E_a \frac{\partial}{\partial E_a}, \\ D_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} - H_a \frac{\partial}{\partial H_a} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} H_a \frac{\partial}{\partial E_a} - 2E_a \frac{\partial}{\partial E_a}, \\ A &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - 2t H_a \frac{\partial}{\partial H_a} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} t H_a \frac{\partial}{\partial E_a} - 3t E_a \frac{\partial}{\partial E_a} - \varepsilon_{abc} x_b H_c \frac{\partial}{\partial E_a}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Теорема 4.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1.1), де $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$, в класі операторів (1.2) є алгебра Лі з базисними елементами (1.5) і

$$D = 2t \frac{\partial}{\partial t} + 3x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - H_a \frac{\partial}{\partial H_a}. \quad (1.11)$$

Теорема 5.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь (1.1), для $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, в класі операторів (1.2), є алгебра Лі $AG(1,3)$, базисні елементами якої задаються формулами (1.10).

Теорема 6.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda_3 \{ [\vec{H}E] + \vec{x}H^2 - \vec{H}(\dot{x}H) \} \quad (1.12)$$

в класі операторів (1.2), є алгебра Лі, базисні елементами якої задаються формулами (1.6) і операторами виду:

$$\begin{aligned} D &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - H_a \frac{\partial}{\partial H_a} - 2E_a \frac{\partial}{\partial E_a}, \\ D_1 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} - H_a \frac{\partial}{\partial H_a} - 3E_a \frac{\partial}{\partial E_a}, \\ A &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx_a \frac{\partial}{\partial x_a} - tH_a \frac{\partial}{\partial H_a} - 2tE_a \frac{\partial}{\partial E_a} + \varepsilon_{abc} H_b x_c \frac{\partial}{\partial E_a}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Теорема 7.

Максимальною алгеброю інваріантності рівнянь

$$\dot{\vec{x}} = \lambda_1 \vec{H} \quad (1.14)$$

в класі операторів (1.2) є алгебра з базисними елементами

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a}, \\ I_{ab} &= x_b \frac{\partial}{\partial x_a} + H_b \frac{\partial}{\partial H_a}, \\ D &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x_a \frac{\partial}{\partial x_a} - 3H_a \frac{\partial}{\partial H_a}, \\ D_1 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + 4H_a \frac{\partial}{\partial H_a}, \\ A &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx_a \frac{\partial}{\partial x_a} - 3tH_a \frac{\partial}{\partial H_a}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Наслідок: система звичайних диференціальних рівнянь типу Ньютона – Лоренца є частинним випадком рівняння (1.1).

Література:

1. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления.- М.:ИЛ, 1947. – 408 с.
2. Овсяников Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та, 1972. – 200 с.
3. Фушич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения// Теорет. и мат. физика. – 1970. - №3. – с. 3-12.

студент Наумович Л. Ю., доц. Миронюк М. В.

Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського

КОНГРУЕНЦІЇ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ З ОДНИМ НЕВІДОМИМ

У статті розглянуто основні теоретичні відомості та деякі приклади розв'язування конгруенцій вищих степенів з одним невідомим

Конгруенціями з одним невідомим за модулем m називаються конгруенції виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m}, \quad (1)$$

де в лівій частині міститься многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо a_n не ділиться на число m , то n називається степенем конгруенції.

Розв'язком конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ називається клас лишків за модулем m , кожне число якого задовольняє цю конгруенцію. Конгруенції називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються.

Щоб побудувати рівносильні конгруенції, над заданою конгруенцією можна проводити такі операції :

а) додавання до обох частин конгруенції будь-якого многочлена $g(x)$ з цілими коефіцієнтами;

б) додавання до однієї з частин конгруенції многочлена з коефіцієнтами, кратними модулю;

в) множення (ділення) обох частин конгруенції на число, взаємно просте з модулем;

г) множення (ділення) обох частин конгруенції і модуля на одне й те саме натуральне число.

Розглянемо спочатку розв'язування конгруенцій $n - \Gamma_0$ степеня за простим модулем виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

де p - просте число. За допомогою описаних вище операцій можна побудувати рівносильну до (2) конгруенцію, степеня не вище $p-1$ з коефіцієнтами, які є найменшими невід'ємними або абсолютно найменшими лишками повної системи лишків за модулем p .

Побудову такої конгруенції можна провести в такому порядку :

а) замінити всі коефіцієнти a_i многочлена $f(x)$ відповідними їм невід'ємними або абсолютно найменшими лишками з повної системи лишків за модулем p ;

б) зробити коефіцієнт при старшому члені конгруенції рівним одиниці;

в) понизити степінь конгруенції.

Число розв'язків конгруенції $n - \Gamma_0$ степеня встановлює така теорема.

Теорема 1. Конгруенція $n - \Gamma_0$ степеня за простим модулем може мати не більше ніж n розв'язків.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції.

При $n=1$ конгруенція (2) має вигляд

$$a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{де } (a_1, p) = 1.$$

За теоремою 1 така конгруенція має єдиний розв'язок. Отже, для $n = 1$ теорема правильна. Нехай тепер теорема правильна для $n = k - 1$. Доведемо, використовуючи це припущення, що вона правильна і для $n = k$. При $n = k$ маємо конгруенцію виду

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3)$$

де a_k не ділиться на p , тобто $(a_k, p) = 1$. Якщо конгруенція (3) не має розв'язку, то в цьому випадку теорема правильна: теорема має більше ніж k розв'язків. Нехай тепер вона має розв'язки і, зокрема, число x_1 задовольняє конгруенцію (3), тобто

$$f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4)$$

Оскільки за теоремою Безу

$$f(x) = (x - x_1)g(x) + f(x_1),$$

де $g(x)$ - многочлен степеня $(k - 1)$, то конгруенція (3) запишеться так:

$$(x - x_1)g(x) + f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$$

і з урахуванням (4) матиме вигляд

$$(x - x_1)g(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Множина розв'язків цієї конгруенції складається з розв'язків конгруенції $x - x_1 \equiv 0 \pmod{p}$ і конгруенції $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Перша з них має один розв'язок, а друга за припущенням індукції – не більше ніж $k - 1$. Разом конгруенція (3) має не більше ніж k розв'язків. Теорему доведено.

Враховуючи сказане вище, покажемо розв'язування конгруенції n -го степеня за простим модулем на такому прикладі.

Приклад [2]. Розв'язати конгруенцію

$$75x^{13} - 62x^{12} - 53x^{11} - 24x^6 + 13x - 27 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Розв'язання. Замінімо коефіцієнти даного многочлена відповідними їм найменшими невід'ємними або абсолютно найменшими лишками з повної системи за модулем 7. Оскільки

$$75 \equiv -2 \pmod{7}, -62 \equiv 1 \pmod{7}, -53 \equiv 3 \pmod{7}, -24 \equiv 4 \pmod{7}, 13 \equiv -1 \pmod{7}, -27 \equiv 1 \pmod{7},$$

то маємо

$$\begin{aligned} \text{або} \quad & -2x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 4x^6 - x + 1 \equiv 0 \pmod{7} \\ & 2x^{13} - x^{12} - 3x^{11} - 4x^6 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Зробимо коефіцієнт при старшому члені одержаного многочлена рівним 1:

$$2x^{13} + 6x^{12} + 4x^{11} - 4x^6 + 8x + 6 \equiv 0 \pmod{7}, (2; 7) = 1$$

$$x^{13} + 3x^{12} + 2x^{11} - 2x^6 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Понизимо степінь конгруенції. Оскільки $x \equiv 0 \pmod{7}$, то можна скористатися теоремою Ейлера, згідно якої $x^{\varphi(7)} \equiv 1 \pmod{7}$, тобто $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Тоді $x^{12} \equiv 1 \pmod{7}, x^{13} \equiv x \pmod{7}, x^{11} \equiv x^5 \pmod{7}$

і будемо мати: $x + 3 + 2x^5 - 2 + 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7}, \quad 2x^5 + 5x + 4 \equiv 0 \pmod{7}.$

Зробимо коефіцієнт при старшому члені одержаної конгруенції рівним 1:

$$2x^5 - 2x + 4 \equiv 0 \pmod{7}, (2, 7) = 1; \quad x^5 - x + 2 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Випробуємо числа повної системи абсолютно найменших лишків за модулем 7: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Маємо
$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{7}, \\ x \equiv -3 \pmod{7}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$$

Складніше розв'язуються конгруенції, коли модуль m є складеним числом.

Якщо m_1, m_2, \dots, m_s – попарно взаємно прості числа, то конгруенція

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m_1 m_2 \dots m_s} \quad (5)$$

еквівалентна системі конгруенцій:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \pmod{m_1}, \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \dots \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_s}. \end{cases} \quad (6)$$

Число розв'язків конгруенції (5) дорівнює $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_s$, де k_1, k_2, \dots, k_s дорівнює відповідно числу розв'язків кожної з конгруенцій (6). Отже, треба розв'язати конгруенцію виду

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad (7)$$

де p – просте число, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Будь-який розв'язок $x \equiv a \pmod{p}$ (8)

конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ (9)

при умові, що $f(x)$ не ділиться на p , є одним з розв'язків конгруенції (7).

Якщо $f(x)$ ділиться на p , то розв'язок (8) або не дає жодного розв'язку для (7), або дає кілька розв'язків [5]. При цьому будемо користуватися такою теоремою:

Теорема 2. Нехай $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ - розв'язок конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$.

Тоді число $x = a + p^{k-1}t, t \in \mathbb{Z}$, є розв'язком конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли відповідне значення t задовольняє конгруенцію

$$f'(a) \cdot t \equiv -\frac{f(a)}{p^{k-1}} \pmod{p}. \quad (10)$$

Доведення див. у [5].

Якщо ж конгруенція (10) не має розв'язків, то в класі розв'язків $x \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ немає жодного розв'язку конгруенції $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Покажемо застосування цієї теорії на конкретному прикладі.

Приклад 2 [2]. Розв'язати конгруенцію

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 12 \equiv 0 \pmod{45}.$$

Розв'язання. Тут кожен з коефіцієнтів при x і вільний член менші за модуль 45, коефіцієнт при старшому члені дорівнює 1, степінь конгруенції 4 менше від $\varphi(45) = \varphi(3^2 \cdot 5) = 24$. Тому попереднього спрощення даної конгруенції робити не потрібно.

$45 = 3^2 \cdot 5$. Тому дана конгруенція рівносильна такій системі конгруенцій:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0(\text{mod } 3^2), \\ f(x) \equiv 0(\text{mod } 5). \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо конгруенцію $f(x) \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Єдиним розв'язком конгруенції за модулем 3 є $x \equiv 0(\text{mod } 3)$.

Використовуючи конгруенцію (7), знайдемо розв'язок даної конгруенції за модулем $3^2=9$. Він буде єдиний $x \equiv 6(\text{mod } 9)$.

За модулем 5 існує три розв'язки даної конгруенції:

$$x \equiv 1(\text{mod } 5), \quad x \equiv 4(\text{mod } 5), \quad x \equiv 4(\text{mod } 5).$$

Отже, потрібно розв'язати три системи конгруенцій:

$$1) \begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 9) \\ x \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 9) \\ x \equiv 2(\text{mod } 5) \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \equiv 6(\text{mod } 9) \\ x \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases}$$

Розв'язавши кожну з них, одержимо: $x \equiv 6(\text{mod } 45), x \equiv 24(\text{mod } 45), x \equiv 42(\text{mod } 45)$.

Література.

1. Алгебра і теорія чисел. Ч.2./ Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І.- К.:Вища шк., 1976.-384с.
2. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Ч.2./ Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О.- К.:Вища шк., 1986.-264с.
3. Бородін О.І. Теорія чисел.- К.:Вища шк., 1970.-274с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел.-М.:Наука, 1981.-176с.
5. Михелович Ш.Х. Теория чисел.-М.Высш.шк., 1967.-336с.

*к.т.н., доц. Дубчак В.М., студент Каширук Ю.М.
Вінницький національний аграрний університет*

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕНЬ У ВІДОМИХ ЗАКОНАХ ФІЗИКИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПРИКЛАДНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Рассматриваются математические модели конкретных экономических задач на основании известных законов физики, исследуются и сравниваются между собой противоположно ориентированные по вертикали приведенные модели.

Вступ. Дана робота має своєю ціллю застосувати методів інтегрального числення у поєднанні з відомими законами фізики і порівнянні відповідних, визначених згідно цих законів, значень числових характеристик симетричних геометричних об'єктів з діаметрально протилежною орієнтацією їх розташування у просторі [1,2,3].

Постановка задачі №1(обчислення роботи). Знайти величину тиску з боку рідини щільності ρ (наприклад, води) на вертикальну площину у вигляді кругового сегмента (див. рис.1) радіуса R висоти $h_0 = (R - y_0)$

$$\Delta S \approx 2x\Delta y = 2\sqrt{R^2 - y^2}\Delta y$$

$$\Delta P \approx \rho y 2\sqrt{R^2 - y^2}\Delta y,$$

$$y_0 \leq y \leq R$$

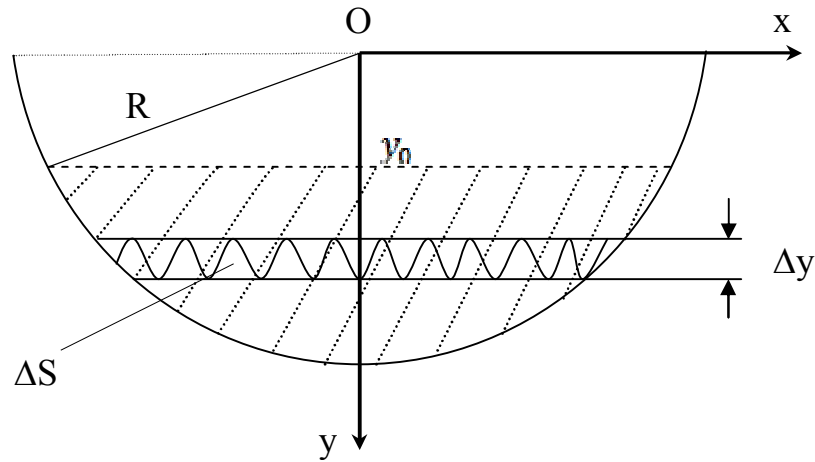


Рис.1 Круговий сегмент макету вертикальної дамби

Отже весь сумарний тиск P буде дорівнювати:

$$P = \int_{y_0}^R 2\rho y\sqrt{R^2 - y^2} dy = \rho \int_{y_0}^R (R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - y^2) = -\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y_0}^R =$$

$$= \frac{2}{3} (R^2 - y_0^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} h_0^{\frac{3}{2}}$$

Наслідок: Якщо $y_0 = 0$, тобто площа дамби співпадає з півкругом радіуса R, тоді $P \Big|_{y_0=0} = \frac{2}{3} \rho R^3$

Постановка задачі №2 (Обчислення тиску з боку рідини законом Паскаля). Порівняти величини тисків з боку рідини (води) на дамбу, виконану у вигляді рівнобічної трапеції (див.рис.2):

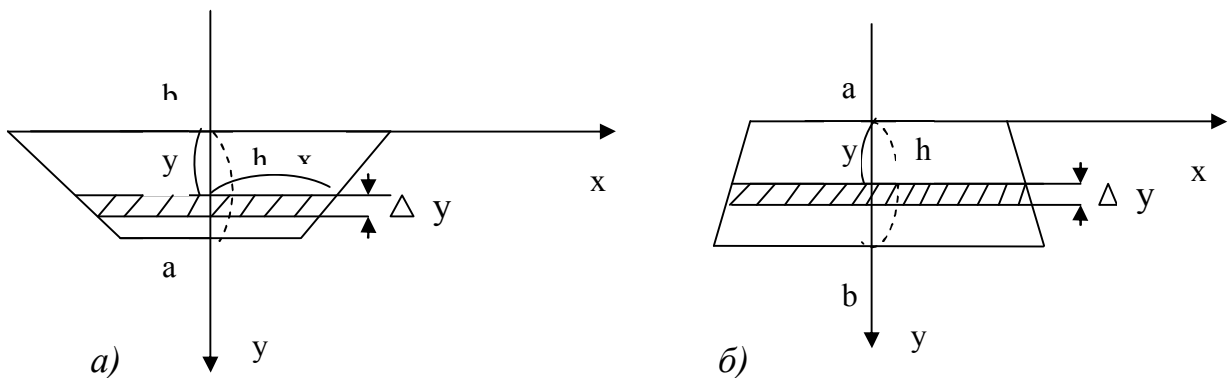


Рис. 2 Розташування плоского макету дамби стосовно вертикалі у вигляді рівнобічної трапеції

Результати. Тут a і b – основи рівнобічної трапеції ($a \leq b$), h – її висота. Згадаємо в основі розв’язку цієї задачі відомий закон Паскаля [4].

$$P = \rho h S,$$

де ρ - щільність рідини, h -глибина занурення деякої площадки площі S , P -величина шуканого тиску.

Позначимо P_a та P_b величини шуканих тисків приведених моделей $a)$ і $b)$.

Знову ж таки, очевидно $\frac{P_b}{P_a} > 1$, оскільки більша частина площі дамби моделі $b)$ знаходиться глибше у порівнянні з моделлю $a)$. Яким конкретно є це співвідношення, ми наразі встановимо.

Як і в задачі №1, виділимо елементарні площадки цієї трапеції, що знаходяться на глибині у з елементарною товщиною Δy . Величини тисків з боку рідини на ці площадки позначимо відповідно ΔP_a та ΔP_b .

Тоді $\Delta P_a \approx \rho y \Delta S_a = \rho y 2x \Delta y$, якщо $x = \frac{a}{2} + t$, тоді $\frac{2t}{b-a} = \frac{h-y}{h}$, або $t = \frac{1}{2}(b-a)(1 - \frac{y}{h})$,

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2}(1 - \frac{y}{h}) = \frac{1}{2}(b - \frac{y}{h}(b-a)) \quad \Delta P_a \approx \rho y (b - \frac{y}{h}(b-a)) \Delta y, \Delta y \rightarrow 0$$

$$A_a = \int_0^h \rho (by - \frac{y^2}{h}(b-a)) dy = \rho (b \frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{h}(b-a)) \Big|_0^h = \rho (\frac{1}{2}bh^2 - \frac{1}{3}(b-a)h^2) = \frac{1}{6} \rho h^2 (b-2a)$$

Аналогічно $\Delta P_b \approx \rho y 2x$, $x = \frac{a}{2} + t$, $\frac{2t}{b-a} = \frac{y}{h}$, або $t = \frac{1}{2}(b-a)\frac{y}{h}$, $x = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{y}{h}$,

тоді $\Delta P_b \approx \rho y (a + (b-a)\frac{y}{h}) \Delta y$, $\Delta y \rightarrow 0$, або

$$P_b = \int_0^h \rho (ay + (b-a)\frac{y^2}{h}) dy = \rho (\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{3}(b-a)\frac{y^3}{h}) \Big|_0^h = \rho h^2 (\frac{a}{2} + \frac{b}{3} - \frac{a}{3}) = \rho h^2 (\frac{a}{6} + \frac{b}{3}) = \frac{1}{6} \rho h^2 (a+2b).$$

Таким чином, $\frac{P_b}{P_a} = \frac{\frac{1}{6} \rho h^2 (b-2a)}{\frac{1}{6} \rho h^2 (a+2b)} = \frac{a+2b}{2a+b} > 1$, якщо $a < b$.

Наслідки: Для прямокутної дамби ($a = b$) $\frac{P_b}{P_a} = 1$, що і слід було очікувати.

Постановка задачі №3 (обчислення роботи). Порівняти величини економічних затрат робіт, необхідних для викачування однакової за щільністю рідини води, пального з двох однакових за геометрією резервуарів, виконаних у вигляді конуса, для одного із них вершина направлена догори, для іншого – ця вершина направлена донизу (див.рис.3).

Результати. При обчисленні величини роботи застосуємо відому формулу [4].

$$A = mgh,$$

m – маса рідини, g – стала вільного падіння, h – висота підйому даної рідини.

Якісний розв'язок цієї задачі можливо подати і без відповідних розрахунків, оскільки для моделі *a)* більша частина маси рідини для зосередження зверху і підняти її на верх резервуара на відміну від моделі *б)* необхідно на меншу висоту. Якщо A_a – величина необхідної роботи для викачування рідини першої моделі *a)*, A_b – та ж робота, але для моделі *б)*, тоді очевидно $A_a < A_b$ або завжди A_a/A_b наша подальша задача полягатиме в точній оцінці даного співвідношення.

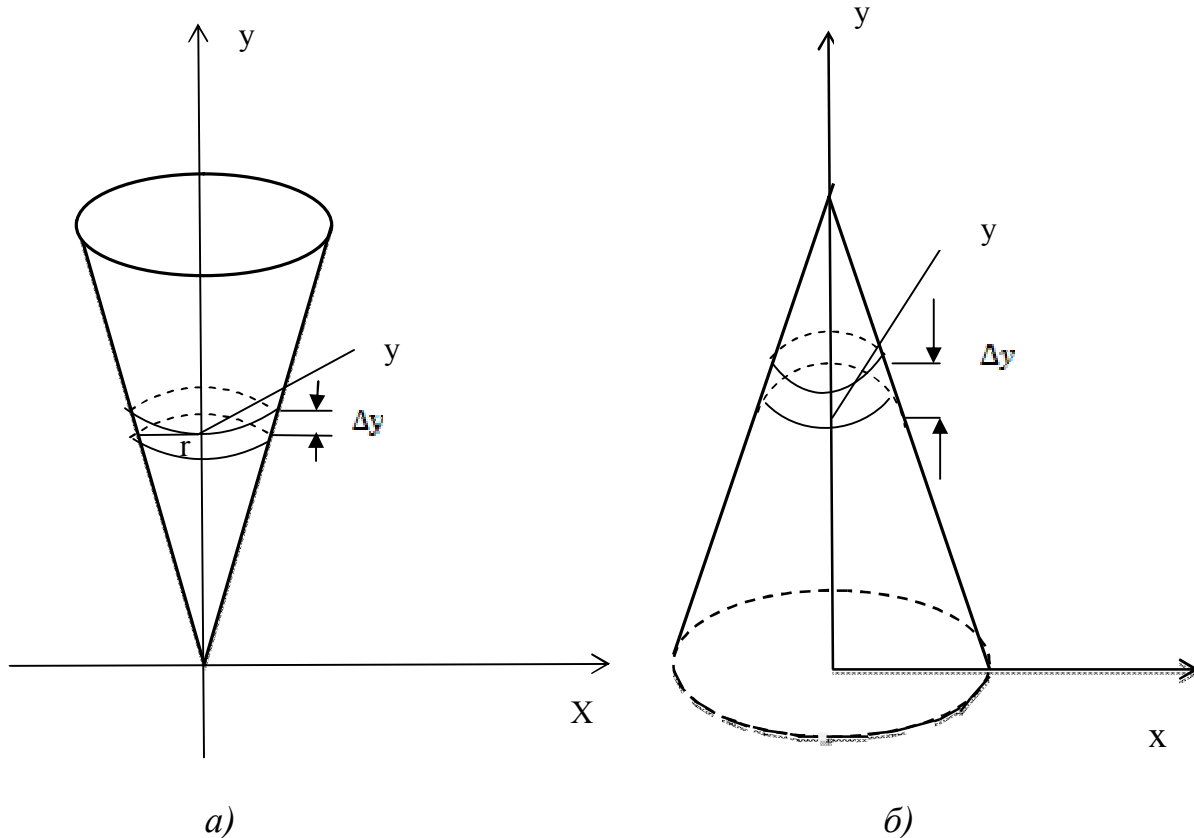


Рис. 3 Розташування однакових за геометрією макетів резервуарів з рідиною стосовно вертикалі

Задамо геометрію симетричних резервуарів: нехай H – висота, R – радіус основи резервуарів, наповнених повністю рідиною деякої щільності ρ . Для обчислення відповідних робіт моделей *a)* чи *б)* безпосередньо скористатись приведеною формулою ми не можемо, оскільки різні частини часток рідини перебувають на різних по висоті значеннях, і тому для кожної із моделей на довільній висоті y виділимо незначний (елементарний) потовщені Δy прошарок рідини, всі частки при умові $\Delta y \rightarrow 0$ можливо вважати зосередженими на висоті y . Тоді елементарна робота ΔA_a чи ΔA_b визначатиметься так:

$$\Delta A_a \approx \Delta mg(H - y) = \rho \Delta V g (H - y) = \rho g \pi r^2 (H - y) \Delta y$$

З подібності трикутників маємо умову: $\frac{R}{r} = \frac{H}{y}$, звідси $r = \frac{R}{H}y$, тому

$$\Delta A_a \approx \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} (H-y) y^2 \Delta y,$$

при умові, що $\Delta y \rightarrow 0$, прирости відповідних величин замінюємо їх диференціалами, і тоді наближений знак рівності замінимо точним:

$$\begin{aligned} A_a &= \int_0^H \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} (H-y) y^2 dy = \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H y^2 - y^3) dy = \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} \left(H \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^H = \\ &= \pi \rho g R^2 H^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12} \pi \rho g R^2 H^2. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислимо роботу A_b :

$$\Delta A_b \approx \pi \rho g r^2 (H-y) \Delta y,$$

але $\frac{r}{R} = \frac{H-y}{H}$, звідки $r = R(1 - \frac{y}{H})$, тому $\Delta A_b \approx \pi \rho g R^2 (1 - \frac{y}{H})^2 (H-y) \Delta y$,

або

$$\begin{aligned} A_b &= \int_0^H \pi \rho g R^2 \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 (H-y) dy = \pi \rho g R^2 \int_0^H \frac{(H-y)^2}{H^2} (H-y) dy = -\pi \rho g \frac{R^2}{H^2} (H-y)^4 \Big|_0^H = \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho g R^2 H^2. \end{aligned}$$

Таким чином, $\frac{A_b}{A_a} = \frac{\frac{1}{4} \pi \rho g R^2 H^2}{\frac{1}{12} \pi \rho g R^2 H^2} = 3$.

Отже для моделі б) необхідно виконати втричі більшу роботу для спустошення резервуара у порівнянні з моделлю а).

Висновок. При реалізації обчислення роботи, яку необхідно затратити на викачування рідини з конічного резервуара, потрібно виконати втричі більшу роботу для резервуара з вершиною конуса, направленою догори, у порівнянні з тим же резервуаром, якщо вершина конуса направлена донизу. Аналогічний результат в роботі приведено для оцінки величини тиску на трапецієвидну площадку з боку рідини в залежності від орієнтації цієї площадки стосовно вертикалі.

Література:

1. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Демидович Б.П. – Москва: Наука, 1971г. - 472 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление/ Пискунов Н.С. – Москва: Наука, 1978г. - 575 с.
3. Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія : Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3.-199с.
4. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения / Балаш В.А. – Москва: Просвещение, 1974. - 430 с.

к.ф.-м.н. Найко Д.А.¹, студенти Дубчак О.В.², Пацалюк О.А.¹

¹Вінницький національний аграрний університет

²Вінницький національний аграрний університет

ПОВЕДІНКОВІ ФУНКЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ

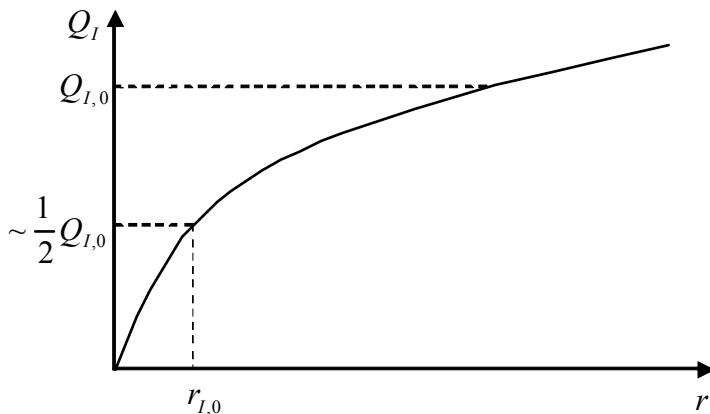
Аналізуються поведінкові функції в економіці та методи їх знаходження.

Розглядаються динамічні моделі, які дозволяють виявити головні параметри, що керують економічними процесами

В математичних моделях еволюційної економіки поведінкові реакції формалізуються, насамперед, у вигляді функції попиту $Q(U, p)$, яка відображає залежність кількості товару Q , придбаного за одиницю часу, від наявних коштів U та ціни p . Кошти U , призначені для придбання товарів, або збігаються з повними накопиченнями виробника, або визначаються його доходами (y) за одиницю часу (якщо накопичення раптом відсутні). В другому випадку функція попиту залежить від доходу та ціни p . В обох випадках якісні властивості функції споживання однакові. Важливо те, що функція $Q(U, p)$ не змінюється при пропорційній зміні ціни p , коштів U та доходів y . Це використовується при деномінації грошей (тобто $Q(U, p)$ – функція нульового рангу). Тому вона залежить від однієї змінної – купівельної спроможності r , яка дорівнює відношенню $r = \frac{U}{p}$.

Через Q_I позначимо функцію попиту на товари та послуги першої необхідності, Q_{II} – на товари довгострокового користування, Q_{III} – на елітні товари. До перших відноситься їжа, одяг, житло, тепло та транспорт. До других – більшість промислових товарів народного споживання. В різних країнах межа між товарами I-ї, II-ї та III-ї категорій різна і є умовною. До елітних товарів та послуг відносяться предмети розкоші, а також предмети та послуги, що символізують авторитет і владу (імідж).

Функцію попиту на товари першої необхідності $Q_I(r)$ наведено на рис.1.



Величина $Q_{I,0}(r)$ є прожитковим мінімумом, що забезпечує існування. Він визначається, швидше фізіологічними потребами, але не «людським фактором». Відмовитись від придбання товарів першої необхідності при наявності навіть дуже малих коштів люди не можуть.

Рис. 1.

При досягненні значення $Q_{I,0}(r)$ функція попиту зростає повільно. Її зростання пов'язане із зміною асортименту, престижем та ін., тобто з тим, що називається «людським фактором». Звідси випливає, що при $r = 0$ функція $Q_I(r) = 0$, а далі зростає, але повільніше за лінійну функцію, тобто скрізь є опуклою. Її зручно подати у вигляді

$$Q_I(r) = Q_{I,0} \cdot \left[\frac{r}{r + r_{I,0}} + \varepsilon_1 \cdot r \right]. \quad (1)$$

Параметр ε_1 відображає наявність товарів іншого виду, що відрізняються і за якістю і за ціною. Він малий і при малих r мало впливає на $Q_I(r)$.

Функція попиту на товари другої категорії $Q_{II}(r)$ задається формулою

$$Q_{II}(r) = \theta(r - r_{\min}) \left[Q_{II,0} \cdot \frac{r - r_{\min}}{(r - r_{\min}) + r_{II,0}} + \varepsilon_2(r - r_{\min}) \right], \quad (2)$$

де $\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

(Рис. 2.)

Функція Q_{II} має такі властивості:

1) вона має пороговий характер. Тобто при нестачі коштів (або високій ціні, тобто при $r < r_{\min}$) люди відмовляються брати товари другої категорії.

2) функція практично не насичується. Ця властивість відіграє важливу роль в еволюційній економіці.

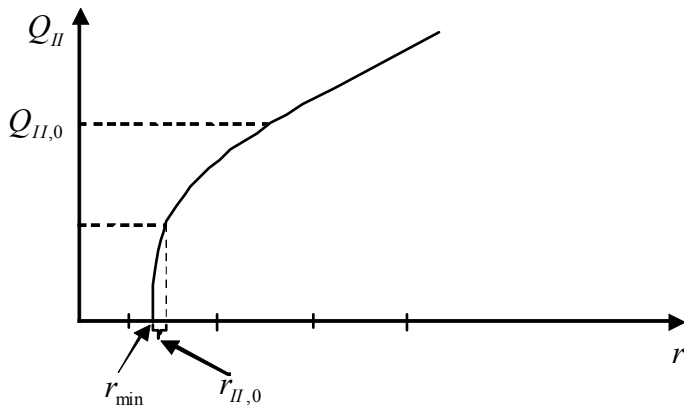


Рис. 2(а).

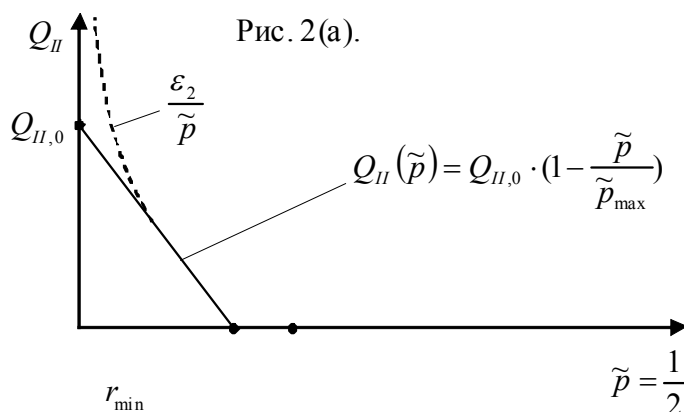


Рис. 2(б).

Ненасичуваність цієї функції – наслідок оновлення асортименту або, що теж саме, розвитку техніки та економіки. При великих r споживання товарів та послуг II-ї категорії плавно переходить в елітне споживання.

Важливою характеристикою функції $Q_{II}(r)$ є стрімкість зростання, тобто її поведінка в околі значення $r = r_{\min}$. Цей параметр відображає чутливість попиту до зміни ціни і/або накопичень. Мірою чутливості в економіці вважається спеціальна величина – еластичність попиту за купівельною здатністю E_r . В даному випадку

$$E_r = \frac{r}{Q} \cdot \frac{dQ}{dr} = \frac{d(\ln Q)}{d(\ln r)}. \quad (3)$$

З (2) випливає, що формально при $r = r_{\min}$ величина E_r є нескінченною. При $r = 2r_{\min}$

$$E_r(r \approx 2r_{\min}) \approx \frac{r_{\min} r_{II,0}}{(r - r_{\min})(r - r_{\min} + r_{II,0})} = \frac{2r_{II,0}}{r_{\min} + r_{II,0}}. \quad (4)$$

Отже, еластичність функції $Q_{II}(r)$ визначається параметром $r_{II,0}$.

Еластичність попиту за ціною E_p зв'язана з еластичністю E_r за купівельною спроможністю r співвідношенням

$$E_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p}}{Q} \cdot \frac{dQ}{d\tilde{p}} = -E_r. \quad (5)$$

Часто використовують подання функції попиту, як залежність Q від умовної ціни \tilde{p} (яка обернено пропорційна купівельній спроможності: $\tilde{p} = p/U = 1/r$) в найпростішій лінійній формі. Цій формі відповідає залежність $Q_{II}(r)$ у вигляді

$$Q_{II} = Q_{II,0} \cdot (1 - r_{\min} \tilde{p}), \quad (6)$$

що показано на рис. 2(б) в координатах \tilde{p}, Q . Важливо, що вираз (6) не описує властивість ненасичуваності, а тому його можна використовувати лише в обмеженому інтервалі значень p . Для порівняння на рис.2(б) штрихом подається вираз (2), що враховує ненасичуваність.

Параметри функції $Q_{II}(r)$ відображають різні боки «людського фактора», тобто залежать від звичаїв у суспільстві, реклами, моди, пропаганди тощо.

Параметр r_{\min} відображає межу між споживанням товарів I-ї та II-ї категорій.

Величина $r_{II,0}$ характеризує поведінку середнього класу. Люди цього прошарку задовольняються товарами II-ї категорії середньої вартості і не намагаються наслідувати еліту. Це означає, що функція $Q_{II}(r)$ веде себе порівняно плавно і спадисто. В Росії та Україні, наприклад, середній клас практично відсутній. Люди, досягнувши економічного успіху, намагаються себе вести як «новые русские» («нові українці»), наслідують еліту, і витрачають кошти на «імідж». Це означає, що функція $Q_{II}(r)$ зростає досить стрімко. Лозунг, на зразок «соромно бути бідним» здатний міняти колективну поведінку. Параметр $Q_{II,0}$ описує рівень життя заможних людей.

В розвинених країнах це рівень життя середнього класу.

Величина ε_2 відображає ріст попиту на елітні товари.

Параметри функції попиту можна знайти кількома способами:

- 1.Метод опитування.
- 2.Метод дотичних оцінок (базується на використанні статистичних даних про доходи, ціни та об'єми товарів виробництва).
- 3.Метод експертних оцінок.

Використовуючи всі три методи, можна відтворити функцію попиту $Q_I(r)$ на товари першої необхідності досить однозначно. При цьому використовують такі величини, як «життєвий мінімум» (йому відповідає параметр $Q_{I,0}$), «продовольчий кошик» (відповідає параметр $r_{I,0}$). Визначення параметрів функції попиту $Q_{II}(r)$ є складнішим і здебільшого спирається на експертні оцінки.

Зручно ввести сумарну функцію $Q(r)$:

$$Q(r) = Q_I(r) + Q_{II}(r), \quad (7)$$

яку подано на рис. 3. З нього видно, що при $r < r_{\min}$ попитом користуються лише товари першої необхідності. При $r > r_{\min}$ споживаються товари як I так і II категорії (та елітні).

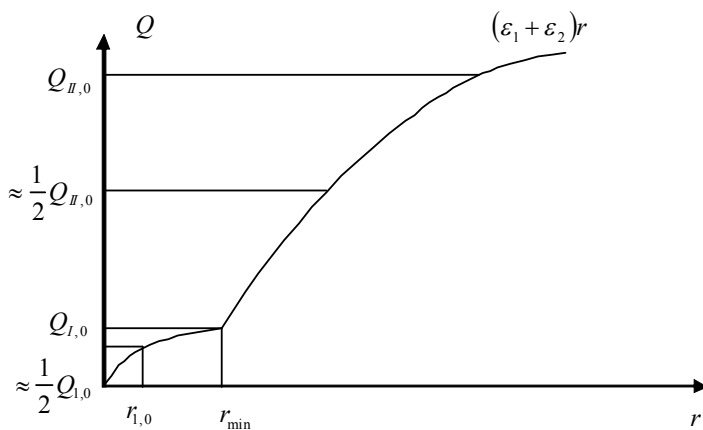


Рис. 3.

Функція $Q(r)$ не є опуклою, $Q_I(r)$ опукла скрізь, $Q_{II}(r)$ опукла лише в області свого існування, але в інтервалі $0 < r < \infty$, взагалі кажучи, є сигмоїдною і, отже, не є опуклою.

Однією з важливих функцій математичного

моделювання економічних процесів є також виробнича функція.

Виробнича функція $F(r, n, \tau)$ визначається, як залежність кількості продукту F , виробленого за одиницю часу τ , від числа людей n , зайнятих у виробництві та вкладених коштів. За одиницю часу приймають протяжність виробничого циклу його (називають часом обороту τ).

В економіці прийнято розділяти кошти, вкладені в працю (тобто в зарплату) Π і капітал K . Такий поділ зручний при розв'язанні питання, що вигідніше: збільшити продуктивність праці за рахунок нових технологій чи за рахунок інтенсифікації праці і/ або збільшення числа працюючих.

На початку ХХ ст. Було запропоновано емпіричну функцію Кобба-Дугласа

$$F(r, n, \tau) = K^\alpha \Pi^{1-\alpha}, \quad (8)$$

де $\alpha \leq 1$ – емпіричний параметр, а величина $\Pi = n(P + P^*)$. Тут P – зарплата, а P^* – традиційні витрати в розрахунку на одного працюючого.

З (8) випливає, що виробнича функція зростає із збільшенням Π повільніше за лінійну функцію, отже, відношення $\frac{F}{\Pi}$ спадає.

Зміст його простий: при наявності виробничих потужностей (тобто, коли Π має порядок K) кількість виробничого продукту пропорційна коштам, що вкладаються. Проте, при заданій і незмінній технології і збільшенні традиційних витрат зростання продуктивності сповільнюється.

Насправді, зростання кількості продукту, що виробляється одним працюючим, не лише сповільнюється, але й має верхню межу, яка визначається рівнем технології та організацією виробництва. Формулою Кобба-Дугласа цей ефект не описується. Виробнича функція може бути записана і в дещо простішій формулі:

$$F(V, n, \tau) = nF\left(\frac{V}{n}, \tau\right) = \begin{cases} n \frac{V}{pn\tau} = \frac{r}{\tau} & \text{при } \frac{r}{n\tau} \leq F_{\max}, \\ nF_{\max} & \text{при } \frac{r}{n\tau} \geq F_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

де F_{\max} – максимальна кількість продукту, виробленого одним працюючим, V – оборотні кошти, $\frac{V}{n}$ – оборотні кошти в розрахунку на одного працюючого, $r = \frac{V}{p}$.

У (9) прийнято, що при малих оборотних коштах і неповному використанні виробничих потужностей функція, $F(r)$ зростає пропорційно до r , але лише до певної межі, що визначається рівнем технології, організацією виробництва та фізичними можливостями працюючих.

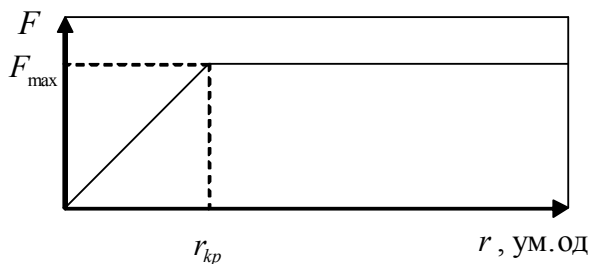


Рис.4.

Функцію $F(r)$ (9) подано на рис.4. Роль «людського фактора» у виробничій функції є суттєвою. Вона проявляється у відношенні до праці, її організації та трудовій дисципліні. Ці фактори відображаються параметрами F_{\max} та τ .

Література:

1. Чернавский Д.С. О проблемах физической экономики / Д.С. Чернавский, Н.И. Старков, А.В. Щербаков // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172, №9 – С. 1045 –1066.

*асистент Шевчук О.Ф., студент Продан В.
Вінницький національний аграрний університет*

ПРО МЕТОДИ ОЦІНКИ АДЕКВАТНОСТІ ТРЕНДОВОЇ МОДЕЛІ

*Розкрито суть методу серій та методу поворотних точок
для перевірки на адекватність трендової моделі*

Прогноз розвитку економічних явищ завжди є важливим моментом у стратегічному управлінні підприємством. Створення прогнозних моделей

можна проводити різними методами, внаслідок чого, постає питання відбору найкращої з моделей. У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі реальному явищу чи об'єкту, для опису якого вона будується. Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей цього об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки цілям дослідження. Найбільшою мірою це твердження справедливо щодо моделей проєктованих систем (тобто в ситуаціях, коли реальна система взагалі не існує).

Тим не менш, у багатьох випадках корисно мати формальне підтвердження (або обґрунтування) адекватності розробленої моделі. Один з найбільш поширених способів такого обґрунтування – використання методів математичної статистики. Суть цих методів полягає у перевірці висунутої гіпотези (в даному випадку про адекватність трендової моделі) на основі деяких статистичних критеріїв. При цьому слід зауважити, що при перевірці гіпотез методами математичної статистики, статистичні критерії не можуть довести ні однієї гіпотези – вони можуть лише вказати на відсутність спростування.

Отже, яким же чином можна оцінити адекватність розробленої моделі в реально існуючій системі? Процедура оцінки заснована на порівнянні вимірювань на реальній системі (\mathfrak{I}_i) і результатів експериментів на моделі ($\tilde{\mathfrak{I}}_i$). Ця вимога рівносильна тому, що послідовність залишків

$$u_i = \mathfrak{I}_i - \tilde{\mathfrak{I}}_i, \quad (1)$$

повинна мати випадкові коливання з нормальним законом розподілу, нульове математичне сподівання та незалежність їх рівнів

Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків проводиться для підтвердження гіпотези про вірогідність вибору вигляду тренду.

Найпростішими методами дослідження випадковості відхилень від тренду є метод серій та метод поворотних точок.

Метод серій використовує таке поняття як медіана вибірки і зводиться до наступних етапів.

Ряд залишків u_i ранжуємо в порядку зростання або спадання і знаходимо медіану $u_{me} = u_{(n+1)/2}$, коли n – непарне та $u_{me} = \frac{u_{n/2} + u_{(n/2)+1}}{2}$, коли n – парне.

Потім порівнюємо початковий ряд залишків з медіаною u_{me} . Якщо при цьому $u_i > u_{me}$, то ставимо знак "+"; якщо $u_i < u_{me}$, то ставимо знак "-"; якщо $u_i = u_{me}$, то значення u_i не враховуємо.

Послідовність плюсів чи мінусів, що йдуть підряд називаємо серією. Якщо V – загальна кількість серій, а k_{max} – кількість членів найдовшої серії, то для 5%-го рівня значущості перевіряємо одночасне виконання двох таких нерівностей:

$$k_{max} < [3,3 \cdot (\lg n + 1)]; \quad (2)$$

$$V > \left[\frac{1}{2} \cdot (n + 1 - 1,96 \cdot \sqrt{n-1}) \right], \quad (3)$$

Якщо при цьому хоча б одна з нерівностей не виконується, то гіпотеза про випадковість залишків часового ряду відхиляється і, отже, трендова модель не є адекватною.

Перевірка на адекватність трендової моделі методом поворотних точок полягає у наступному. Точка u_i називається поворотною, якщо $u_{i-1} < u_i > u_{i+1}$ або $u_{i-1} > u_i < u_{i+1}$.

Якщо Π – загальна кількість поворотних точок, $\bar{\Pi}$ – їх математичне сподівання, σ_{Π}^2 – їх дисперсія, де за умови випадковості вибірки залишків

$$\bar{\Pi} = \frac{2}{3}(n - 2); \quad (4)$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{(16n - 29)}{90}, \quad (5)$$

то на 5% рівні значущості виконання нерівності

$$\Pi > \left[\bar{\Pi} - 1,96 \sqrt{\sigma_{\Pi}^2} \right], \quad (6)$$

означає, що трендова модель адекватна.

Слід зазначити, що на практиці не завжди вдається відразу побудувати достатньо якісну модель прогнозування, тому етапи побудови трендових моделей економічної динаміки можуть виконуватись неодноразово.

Подані методи перевірки трендової моделі на адекватність досить просто реалізуються на практиці, носять універсальний характер і можуть бути використані при дослідженні будь-яких економічних явищ та категорій. Ці методи стануть у нагоді як студентам, при виконанні навчальних розрахункових завдань, так і дослідникам при аналізі реально функціонуючих підприємств.

Література:

1. Євсєєва О.О. Впровадження науково-практичного дослідження та удосконалення його методичного інструментарію: оцінка показників дослідження на аномальність / О.О. Євсєєва // Вісник економіки транспорту і промисловості. – К. – 2010. - №31.- С. 94-98.

2. Найко Д.А. Про існування тренду інтегрального показника фінансової стійкості тестового підприємства / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 168-174.

3. Найко Д.А. Інтегральний показник фінансової стійкості тестового підприємства: прогноз та адекватність моделі / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 174-182.

*доц. Левчук О.В., студентка Шаповал О.О.
Вінницький національний аграрний університет*

МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Простежено становлення методу моделювання в екологічних дослідженнях.

Розглянуто метод математичного моделювання та види моделей

У процесі пізнання складних еколого-географічних систем важливе місце належить методу моделювання. Моделювання стану довкілля – метод дослідження будови, функціонування, динаміки та розвитку екологічних об'єктів або процесів з використанням моделей, які певною мірою відповідають оригіналові. Модель – це, перш за все, засіб виділення інформаційно-синтактичної сторони теорії, тобто інформації про способи встановлення логічного зв'язку [1, с. 55]. Моделі складного об'єкта як системи дають можливість виділити лише його загальні риси. Для наповнення їх конкретним змістом необхідно виявити та проаналізувати підсистеми об'єкта [2]. Тому будь-яке принципове явище піддається аналізу та тлумаченню на основі взаємозв'язків між компонентами цієї схеми.

Основний методологічний принцип моделювання – системний підхід. Моделювання стану довкілля застосовують переважно з іншими методами, зокрема експериментом і спостереженням.

Водночас, сучасна наука характеризується глибоким проникненням математичних методів у її різні галузі. З середини 50-х років у всьому світі почався стійкий ріст інтересу до використання математики в екології.

Моделювання – це опосередковане дослідження тих об'єктів пізнання, безпосереднє вивчення яких іншими методами дуже утруднене або неможливе. У генетичному відношенні прості способи моделювання (наприклад, зображення) виникли у результаті багатовікової діяльності людини. Наукове моделювання у своїй першочерговій формі появилось вже в античній науці, а потім відродилось у XV – XVI ст. і отримало подальший розвиток переважно у астрономії, механіці, фізиці, хімії, архітектурі. Однак труднощі, пов'язані з переносом отриманої інформації з допомогою моделі на об'єкт пізнання, довгий час не дозволяли широко застосовувати цей метод у наукових дослідженнях. У результаті НТП у XX ст. метод моделювання набирає важливого гносеологічного значення. Він проникає у всі галузі науки й техніки, де вивчення визначених об'єктів є складним без побудови й оперування моделями.

Вихідною науковою категорією метода моделювання є “модель”. У широкому розумінні вона трактується дуже багатозначно: як образ, прообраз, зображення, копія, рисунок, план, карта, графік, формули, матриці, описи і т.д. Моделювання – одна із основних категорій теорії пізнання: на ідеї моделювання базується будь-який метод наукового дослідження – як теоретично (використовуються різноманітні знакові, абстрактні моделі) так і експериментально (використовуючи предметні моделі).

Отже, модель розуміється, як така, думкою представлена або матеріально

реалізована, система, яка відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна замінити її так, що її вивчення дає нам нову інформацію про цей об'єкт. У даний час виділяють два основних типи моделей – предметні або матеріальні і знакові або ідеальні. Предметні (матеріальні) моделі функціонують за законами свого буття, незалежно від того, чи створена ця модель природою чи сконструйована людиною. Так, сучасні інформаційні технології, що використовуються у якості моделюючих улаштувань, є матеріальними моделями, оскільки вони функціонують на основі механічних, електричних і інших фізичних законів світу.

Знакові (ідеальні) моделі, створені людиною в процесі наукового дослідження, також втілюються у визначену матеріальну форму у вигляді різного роду карт, схем, графіків, формул і т.д. У процесі екологічних досліджень створені моделі можуть відтворювати, відображати, імітувати ті або інші принципи.

Перенесення одержаних результатів на реальний прототип моделі здійснюють на підставі логічних висновків, гіпотез подібності, пов'язаних з формалізованою процедурою моделювання. Іноді початковою стадією моделювання стану довкілля є описові (вербальні) еколого-географічні моделі. Виділяють також наочну форму моделювання стану довкілля, яка передбачає просторові зв'язки об'єктів, співвідношення та взаємозв'язок його частин. Наприклад, у графічних моделях такі зв'язки відображають за допомогою геометричних фігур, стрілок тощо. В залежності від цілей і рівня еколого-географічного дослідження застосовують різні форми, способи і прийоми моделювання: картографічні, статистичні, математичні, абстрактно-логічні та ін.

Спосіб статистичного моделювання поєднує статистичне картографування (картограми, картодіаграми), порівняльні і динамічні статистичні діаграми і графіки. У процесі еколого-географічних досліджень воно не виключає картографічного моделювання, а значно доповнює його. Карти-моделі мають включати діаграми і графіки. В еколого-географічних дослідженнях може застосовуватись математична статистика на основі якої створюються морфометричні карти-моделі.

Математичному моделюванню належить особливе місце у еколого-географічних дослідженнях. Математичні методи в екології застосовують у випадках, коли еколого-географічні явища й процеси можна подати у вигляді логіко-математичних схем, рівнянь, алгоритмів [2,3]. Останні є основою моделювання із застосуванням інформаційних технологій.

Література:

1. Анисимова Л. Е., Штофф В. А. Информационная функция теории и модели // Вопросы философии. – 1966. – № 12. – С. 55-56.
2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: Навчальний посібник для студентів екологічних і біологічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – К.: Вид. дім "КМ Академія", 2002. – 203 с.
3. Мокін В.Б., Мокін Б.І. Математичні моделі та програми для оцінки якості річкових вод. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 152 с.

*к.т.н. Дубчак В.М., ас. Хрипко Т.Є.
Вінницький національний аграрний університет*

ДЕКІЛЬКА ПІДХОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Розглядаються, порівнюються та аналізуються різні підходи та методи елементарної та вищої математики до розв'язку однієї конкретної геометричної задачі

У процесі навчання математики геометричні задачі відіграють велику й багатопланову роль. Розв'язування задач добре служить досягненню тих цілей, які ставляться перед навчанням математики як в середній школі, так і в середніх та вищих навчальних закладах. Саме тому більше половини уроків математики відводиться розв'язуванню задач та виконанню вправ.

Розв'язуючи задачі, учні засвоюють найважливіші математичні поняття, оволодівають математичною символікою, навчаються виконувати доведення теорем, тощо. Крім того, математичні задачі можуть готувати до засвоєння нових теоретичних питань, допомагати закріпленню здобутих знань, ілюструвати практичні застосування вивченого матеріалу. У процесі розв'язування задач в учнів формуються навички розумової праці, а також важливі риси характеру: наполегливість, уважність, зосередженість.

При вивченні методів, способів та прийомів доведень і розв'язування задач важливо давати учням алгоритми, евристичні схеми, а також орієнтири ефективного їх використання [1]. Необхідно вчити учнів використовувати набуті математичні знання при пошуку розв'язків як стандартних, так і нестандартних задач, розвивати їх інтуїцію, вміння прогнозувати результати. Для цього учні спочатку перебирають можливі ідеї і методи, фіксують їх, використовують наочні ілюстрації, моделюють, порівнюють можливі шляхи пошуку і вибирають найбільш раціональний з них.

При вивченні геометрії необхідно формувати в учнів потребу в доведеннях, навчати їх методам доведень, а також різноманітним методам і способам розв'язування задач. При розв'язуванні однієї і тієї ж задачі різними методами чи способами відомі учням вправи переносяться в нові умови, повторюються в нових зв'язках [2]. В цьому випадку повторення учбового матеріалу проводиться учнями активно, більш свідомо, більш цілеспрямовано.

Розв'язуючи одну геометричну задачу різними методами чи способами, можна краще зрозуміти специфіку того чи іншого методу, його переваги і недоліки залежно від змісту задачі. Використання різних методів та способів дає змогу в окремих випадках замінити одне розв'язання іншим - легшим, шукати ефективніші методи навчання, творчо розв'язувати інші питання навчального процесу [3].

Д.Пойа стверджував, що краще розв'язати одну задачу різними методами чи способами, ніж декілька різних чи однотипних задач одним і тим же методом [4]. При цьому відбувається не лише ознайомлення учнів з різними

методами чи способами розв'язків, а і порівняння переваг і слабких сторін кожного з них.

На уроках не обов'язково розв'язувати різними методами чи способами кожену задачу, достатньо вибрати одну чи два. З метою активізації пізнавальної діяльності учнів та засвоєння ними різних методів розв'язування геометричних задач пропонується використовувати на уроках нестандартні методи розв'язування геометричних задач.

Взагалі, термін «нестандартні» методи розв'язування задач в методиці математики не визначений, але багато авторів в своїх роботах використовують цей термін. Відмітимо, що серед шкільних задач є багато таких, для розв'язання яких використовуються незвичні для школярів міркування. Це задачі, які для школярів вважаються задачами підвищеної складності і потребують нестандартних методів розв'язування. Ці методи ілюструють широкі можливості використання добре засвоєних шкільних знань та прищеплюють учням навички використання нестандартних методів міркувань при розв'язуванні задач.

Наведемо приклад однієї із таких задач та способи її розв'язування.

Постановка задачі. Визначити кут між бісектрисами двох плоских кутів правильного тетраедра, які виходять з однієї вершини.

Розв'язок

І спосіб:

За означенням правильного тетраедра [5], яку б грань ми не розглянули, маємо рівносторонній трикутник.

Опустимо з вершини D тетраедра DABC бісектриси DM та DN на грані ADC та ADB. (рис.1) Отримаємо $\angle NDM$ - кут між бісектрисами двох плоских кутів.

Нехай $BC = x$, тоді $MN = \frac{1}{2}x$ (середня лінія трикутника ABC), $DN = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ (за властивістю бісектрис рівносторонніх трикутників ADC, ADB) та $\angle NDM = \alpha$.

З $\triangle NDM$ - рівнобедреного, де DK - висота трикутника та $\angle NDK = \frac{\alpha}{2}$ і $KN = \frac{1}{4}x$, за

$$\text{означенням } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{KN}{DN} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{DK}{DN} = \frac{\sqrt{DN^2 - KN^2}}{DN} = \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

$$\text{Тоді, } \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{11}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}, \text{ де}$$

$$\alpha = \arccos \frac{5}{6}.$$

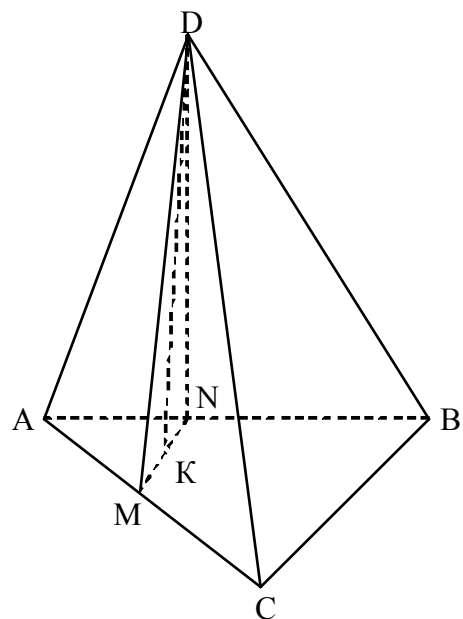


Рис. 1.

Також слід зауважити, що $\cos \alpha$ можна знайти за теоремами косинусів та

синусів. За теоремою синусів: $\frac{DN}{\sin \angle DMN} = \frac{MN}{\sin \angle MDN}$, де $DN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,
 $\angle DMN = \angle DMK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $MN = \frac{1}{2}x$.

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\sin(90 - \frac{\alpha}{2})} = \frac{\frac{1}{2}x}{\sin \alpha}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{DK}{DN} = \frac{\sqrt{DN^2 - KN^2}}{DN} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \sqrt{\frac{11}{12}},$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{11}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{6}, \text{ де } \alpha = \arccos \frac{5}{6}.$$

За теоремою косинусів:

$$MN^2 = DM^2 + DN^2 - 2DM \cdot DN \cos \angle MDN = 2DN^2 - 2DN^2 \cos \angle MDN$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 2 \cdot \frac{3}{4}x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x^2 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{5}{6}, \quad \text{де } \alpha = \arccos \frac{5}{6}.$$

II спосіб:

Розмістимо правильний тетраєдер DABC у декартовій системі координат, причому так, щоб вершина D лежала на додатній піввісі і проектувалася в центр основи $\triangle ABC$, розміщеного в пл. XOY, тобто в т.(0;0;0). (рис.2)

Нехай т. A(1;0;0), тоді т. B(x₁;y₁;0) та т. C(x₂;y₂;0).

Опишемо навколо $\triangle ABC$ одиничне коло та знайдемо координати точок B і C з означення тригонометричних функцій (мал.3):

$$x_1 = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \text{тобто т. B}(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0).$$

$$y_1 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2 = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \text{тобто т. C}(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0).$$

$$y_2 = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

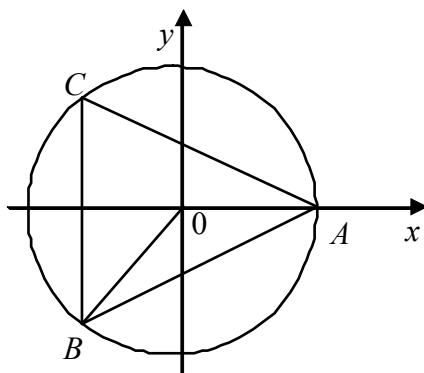


Рис. 3.

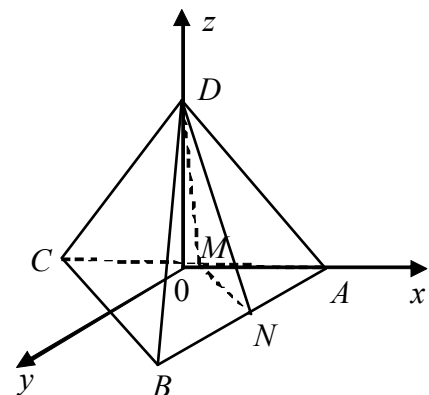


Рис. 2.

За формулою відстані між двома точками:

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}.$$

За розміщенням у просторі т. D(0;0;z), тоді

$$\vec{AD} = \{-1; 0; z\}, \quad |\vec{AD}| = \sqrt{1 + z^2}.$$

Так як $AD = AB = \sqrt{3}$, то отримаємо рівність

$$\sqrt{1 + z^2} = \sqrt{3}; \quad \text{звідси } z_1 = \sqrt{2} \text{ та } z_2 = -\sqrt{2} \text{ (не}$$

задовольняє умові розміщення т. D).

Отже т. $D(0;0;\sqrt{2})$.

Проведемо з вершини D бісектриси DM і DN плоских кутів $\angle ADC$ і $\angle ADB$ (рис. 2). За побудою MN - середня лінія $\triangle ABC$, тобто т. $M(x_3; y_3; 0)$ - середина сторони AB , т. $N(x_4; y_4; 0)$ - середина сторони AC .

Знайдемо координати точок M і N :

$$x_3 = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad \text{т. } M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right),$$

$$x_4 = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}, \quad y_4 = \frac{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad \text{т. } N\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right).$$

$$\text{Тоді, } \overrightarrow{DM} = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; \sqrt{2} \right\}; \quad \overrightarrow{DN} = \left\{ \frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; \sqrt{2} \right\};$$

$$\cos \angle MDN = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{DM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 2} \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 2}} = \frac{5}{6}, \quad \text{де } \angle MDN = \arccos \frac{5}{6}.$$

III спосіб:

Розглянемо більш загальний випадок побудови тетраедра $DABC$ з довільною стороною a та довільними координатами його вершин.

Нехай т. $A(x_1; y_1; z_1)$. за координатами цієї точки послідовно побудуємо інші

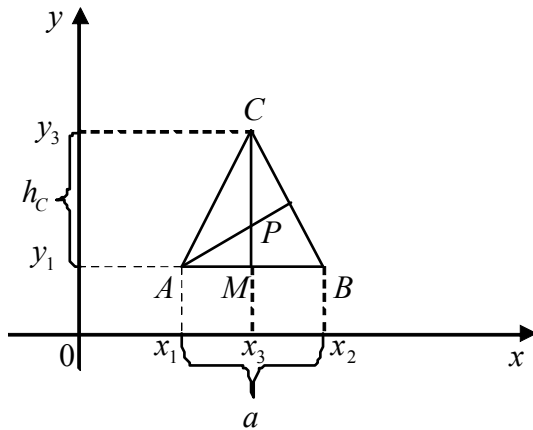


Рис. 4.

три точки, вказавши їх координати.

Для спрощення обчислень, побудуємо $\triangle ABC$ в площині HOY декартової системи координат. Таким чином, т. $A(x_1; y_1; 0)$, т. $B(x_2; y_2; 0)$, т. $C(x_3; y_3; 0)$.

Знову ж таки для спрощення обчислень приведеної моделі, нехай одна із сторін (наприклад AB), буде паралельна одній із координатних осей (наприклад осі OX) (рис.4), тоді

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + a \\ y_2 = y_1 \end{cases} \quad \text{т. } B(x_1 + a; y_1; 0).$$

Очевидно з рис.4, що координати т. C $\triangle ABC$ будуть наступними:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \\ y_3 = y_1 + h_C; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{2x_1 + a}{2}; \\ y_3 = y_1 + \frac{a\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \text{т. } C\left(\frac{2x_1 + a}{2}; y_1 + \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right).$$

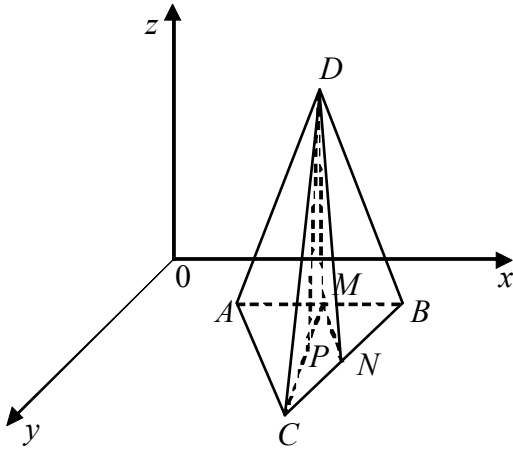


Рис. 5.

Нехай т. Р – точка перетину висот $\triangle ABC$, тобто $CM = h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тоді $PM = \frac{1}{3}h_c = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Отже, т.Р $\left(\frac{2x_1 + a}{2}; y_1 + \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$.

В свою чергу четверта вершина D тетраедра DABC проектується в т. Р $\triangle ABC$ (рис.5) і матиме слідуочі координати: т. D $\left(\frac{2x_1 + a}{2}; y_1 + \frac{a\sqrt{3}}{6}; h_D\right)$, де $h_D = DP$ - висота тетраедра DABC, опущена з вершини D на грань $\triangle ABC$.

З $\triangle DPB$, маємо: $BD^2 = BP^2 + PD^2$ або

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2, \text{ де } |\overrightarrow{PD}| = h_D$$

$$\overrightarrow{BP} = \left\{ \frac{2x_1 + a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0 \right\}, |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Тоді, } a^2 = \frac{a^2}{3} + h_D^2 \Rightarrow h_D = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \text{ Отже, т. D } \left(\frac{2x_1 + a}{2}; y_1 + \frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Знайшовши послідовно всі чотири вершини тетраедра DABC, кожне ребро якого рівне а, знайдемо координати точок М і N, які відповідають основам апофем DM та DN побудованого тетраедра:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4x_1 + 3a}{4}; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4y_1 + a\sqrt{3}}{4}; \quad \text{т. M } \left(\frac{4x_1 + 3a}{4}; \frac{4y_1 + a\sqrt{3}}{4}; 0 \right).$$

$$x_N = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{2x_1 + a}{2}; \quad y_N = \frac{y_B + y_A}{2} = y_1; \quad \text{т. N } \left(\frac{2x_1 + a}{2}; y_1; 0 \right).$$

$$\text{Тоді, } \overrightarrow{DM} = \left\{ \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\} \text{ та } \overrightarrow{DN} = \left\{ 0; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right\},$$

$$|\overrightarrow{DM}| = |\overrightarrow{DN}| = \sqrt{\frac{3a^2}{36} + \frac{2a^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2};$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = -\frac{a^2}{24} + \frac{2a^2}{3} = \frac{15}{24}a^2 \text{ (скалярний добуток векторів)}$$

$$\text{Отже, } \cos \angle MDN = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{DM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{15}{24}a^2}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} = \frac{5}{6}, \text{ де } \angle MDN = \arccos \frac{5}{6}.$$

Значення тригонометричної функції шуканого кута $\angle MDN$ можна знаходити використовуючи і векторний добуток векторів. Оскільки, для площі $\triangle DNM$ тетраедра DABC справедливі такі співвідношення:

$S_{\Delta DNM} = |\overline{DM} \times \overline{DN}| = |\overline{DM}| |\overline{DN}| \sin \angle(\overline{DM}; \overline{DN})$, де $\overline{DM} \times \overline{DN}$ - векторний добуток

векторів, звідси слідує, що $\sin \angle(\overline{DM}; \overline{DN}) = \frac{|\overline{DM} \times \overline{DN}|}{|\overline{DM}| |\overline{DN}|}$.

Оскільки,

$$|\overline{DM} \times \overline{DN}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a\sqrt{3} & -a\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{a\sqrt{3}}{6} & -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \left| -\frac{a^2\sqrt{2}}{4}i + \frac{a^2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}j - \frac{a^2\sqrt{3}}{24}k \right| = a^2 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{192}} = \frac{a^2\sqrt{11}}{8} \text{ та}$$

$$|\overline{DM}| = |\overline{DN}| = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \text{ то}$$

$$\sin \angle(\overline{DM}; \overline{DN}) = \frac{\frac{a^2\sqrt{11}}{8}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \cos \angle(\overline{DM}; \overline{DN}) = \sqrt{1 - \sin^2 \angle(\overline{DM}; \overline{DN})} = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6},$$

$$\angle MDN = \arccos \frac{5}{6}.$$

IV спосіб:

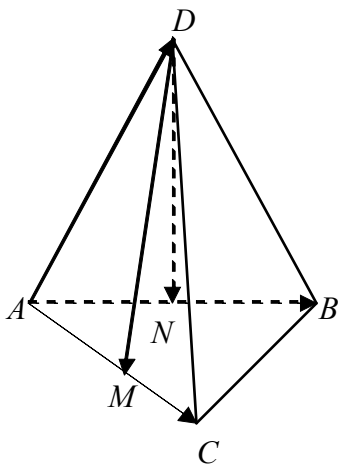


Рис. 6.

Розглянемо правильний тетраєдер DABC (рис.6) та введемо такі позначення: $\overline{AC} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AD} = \vec{c}$. Відомо, що $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle(\vec{a}; \vec{c}) = \angle(\vec{b}; \vec{c}) = 60^\circ$ та $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

За властивістю векторів: $\overline{BC} = -\vec{b} + \vec{a}$ та $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$
 $\overline{DN} = -\frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$; $\overline{DM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{c}$.

Тоді, $\cos \angle(\overline{DM}; \overline{DN}) = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{DN}}{|\overline{DM}| |\overline{DN}|}$, де

$$\overline{DN} \cdot \overline{DM} = \left(\vec{c} - \frac{\vec{b}}{2} \right) \cdot \left(\vec{c} - \frac{\vec{a}}{2} \right) = |\vec{c}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}| \cos 60^\circ - \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}| \cos 60^\circ + \frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8};$$

$$|\overline{DN}|^2 = |\vec{c}|^2 - \left| \frac{\vec{b}}{2} \right|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow |\overline{DN}| = |\overline{DM}| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Отже, } \cos \angle(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}) = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{DM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{9}{6}} = \frac{5}{6}, \text{ де } \angle MDN = \arccos \frac{5}{6}.$$

Розглядаючи та аналізуючи дану задачу, ми бачимо, як щільно переплітаються елементи шкільної геометрії та вищої математики. Перші два способи рекомендуються для учнів старших класів середніх шкіл, а третій та четвертий – для учнів гімназій, з поглибленим вивченням математики та студентам середніх та вищих навчальних закладів.

Ми навели приклади лише деяких типових методів та способів розв'язування геометричних задач, які можна використовувати як при розв'язуванні стандартних, так і нестандартних задач. Ці методи та способи не будуть дуже складними для розуміння учнями. Їх можна використовувати як на уроках геометрії, так і на факультативних заняттях. Це потрібно не лише для того, щоб оживити уроки та заняття, але й для того, щоб розвивати математичні здібності і навички учнів, розширити їх математичні знання, щоб показати учням, що математика є живою та цікавою наукою.

Література:

1. Самовол П. І. Методична система роботи із здібними та обдарованими з математики учнями в середній школі.: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / УДПУ ім. М. П. Драгоманова. К., 1995. 221с.
2. Зайцева Г. Д. О решении задач различными методами // Математика в школе. 1982. №5. С. 50-52.
3. Ліба О. Активізація пізнавальної діяльності учнів // Математика в школі. 2001. №2. С. 44-46.
4. Пойа Д. Как решать задачу. Пер. с англ. М.: Учпедгиз, 1961. . 207с. ведення. // Математика в школе. 2000. №4. С. 6-8.
5. М. Я. Вигодський. Довідник з елементарної математики. Київ, 1953. – С. 309-310.

асистент Шевчук О.Ф., студентка Рибак Н.В.
Вінницький національний аграрний університет

ПРО МЕТОДИ ПЕРЕВІРКИ НАЯВНОСТІ ТРЕНДУ РЯДУ ДИНАМІКИ

Розкрито суть методу серій знаків та методу перевірки різниць середніх рівнів для визначення наявності тренду ряду динаміки

Останнім часом є актуальними питання щодо аналізу часових рядів, побудові трендових і тренд-сезонних моделей часових рядів і використання їх для прогнозування розвитку економічних процесів. Необхідність використання таких методів виникає порівняно часто, вони використовуються для прогнозування показників фондового ринку, грошових потоків, зміни

матеріальних запасів на складах і в магазинах і в багатьох інших випадках. Трендові і тренд-сезонні моделі при всій їх простоті можуть давати більш надійні результати прогнозування, ніж складні економіко-математичні моделі, засновані на системах алгебраїчних і диференціальних рівнянь, особливо при короткостроковому і середньостроковому прогнозуванні.

Якщо в часовому ряду проявляється тривала (вікова) закономірність зміни рівнів, то говорять, що має місце тренд. Таким чином тренд визначає загальний напрямок розвитку економічного процесу. Економіко-математична модель, в якій розвиток досліджуваної економічної системи відображається через тренд її основних показників, називається трендовою моделлю. Для виявлення тренду часових рядів, а також для побудови та аналізу трендових моделей використовується апарат теорії ймовірностей і математичної статистики. Проте слід мати на увазі, що цей апарат призначений для обробки простих статистичних сукупностей, і тому застосування методів теорії ймовірності та математичної статистики вимагає певних поправок.

Наявність тренду в динамічному ряду перевіряють за спеціальними методами. Одним з них є метод серій знаків, який реалізовується за таким алгоритмом:

1. Для досліджуваного часового ряду визначаємо послідовність знаків, виходячи з умов

$$\delta_i = \begin{cases} +, & \text{коли } y_{i+1} - y_i > 0, \\ -, & \text{коли } y_{i+1} - y_i < 0. \end{cases} \quad (1)$$

при цьому, якщо в часовому ряду сусідні значення однакові, то береться одне з них.

2. Обчислюємо число серій $\nu(n)$. Під серією розуміємо послідовність підряд розташованих плюсів чи мінусів, причому один плюс чи один мінус вважається серією.

3. Визначаємо протяжність $l_{\max}(n)$ самої довгої серії.

4. Знаходимо число $l(n)$, яке визначається за такою таблицею

Довжина ряду n	$n < 26$	$26 < n < 153$	$153 < n < 170$
Значення $l(n)$	5	6	7

5. Якщо хоча б одна з двох наступних нерівностей не виконується, то з довірчою імовірністю 0,95 гіпотезу про відсутність тренду відкидають:

$$\begin{cases} \nu(n) > \left[\frac{1}{3} \cdot (2n - 1) - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{16n - 29}{90}} \right]; \\ l_{\max}(n) \leq l(n). \end{cases} \quad (2)$$

(Символ $[a]$ означає цілу частину числа a).

Перевірку наявності тренду в динамічному ряду можна зробити і за методом перевірки різниць середніх рівнів

Ідея методу перевірки різниць середніх рівнів така:

1. Динамічний ряд y_1, y_2, \dots, y_n ділимо на дві приблизно однакові частини довжиною n_1 та n_2 ($n_1 + n_2 = n$);

2. Для кожної з цих частин обчислюємо середні значення \bar{y}_1, \bar{y}_2 та незміщені дисперсії σ_1^2 та σ_2^2 ;

3. За допомогою критерію Фішера F_α перевіряємо однорідність дисперсій обох частин ряду, де

$$F_\alpha = \begin{cases} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, & \text{коли } \sigma_1^2 > \sigma_2^2; \\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, & \text{коли } \sigma_2^2 > \sigma_1^2. \end{cases} \quad (3)$$

При цьому рівень значущості α беремо 0,1; 0,01 або 0,05. Якщо розрахункове значення $F_\alpha^{(p)}$ менше за табличне $F_\alpha^{(T)}$, то гіпотеза про рівність дисперсій приймається і ми переходимо до перевірки наявності або відсутності тренду. Якщо $F_\alpha^{(p)} \geq F_\alpha^{(T)}$, то гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється і ми робимо висновок про те, що даний метод не дає відповіді на питання про наявність чи відсутність тренду;

4. Гіпотезу про відсутність тренду перевіряємо з використанням t -критерію Стьюдента. Тут

$$t_p = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (4)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}. \quad (5)$$

Якщо на рівні значущості α $t_p \leq t_\alpha$ (t_α – табличне значення), то гіпотезу про відсутність тренду приймаємо. Якщо $t_p > t_\alpha$, то з імовірністю $1 - \alpha$ приймаємо гіпотезу про існування тренду.

Подані методи перевірки наявності тренду динамічного ряду досить просто реалізуються на практиці, носять універсальний характер і можуть бути використані при дослідженні будь-яких економічних явищ та категорій. Ці методи стануть у нагоді як студентам, при виконанні навчальних розрахункових завдань, так і дослідникам при аналізі реально функціонуючих підприємств.

Література:

1. Євсєєва О.О. Впровадження науково-практичного дослідження та удосконалення його методичного інструментарію: оцінка показників дослідження на аномальність / О.О. Євсєєва // Вісник економіки транспорту і промисловості. – К. – 2010. – №31. – С. 87-92.

2. Найко Д.А. Про існування тренду інтегрального показника фінансової стійкості тестового підприємства / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 168-174.

3. Найко Д.А. Інтегральний показник фінансової стійкості тестового підприємства: прогноз та адекватність моделі / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 174-182.

*к.т.н. Дубчак В.М., к.т.н. Красиленко В.Г.
Вінницький національний аграрний університет*

ОДИН ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ЦЕНТРОЇДИ (ЦЕНТРА ВАГИ) МАСИВУ ДИСКРЕТНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Пропонується математична модель алгоритму, основаного на ітераційних співвідношеннях, обчислення координат центра ваги двохвимірному масиву дискретної інформації, приводяться приклади конкретної реалізації комп'ютерного моделювання запропонованого методу.

Актуальною є задача знаходження статичних моментів та координат центра ваги геометричних зображень [1-3]. Відомі різноманітні підходи та методи обчислення вказаних числових характеристик та їх практичної реалізації [2-4]. В основу цих методів покладено відомі формули обчислення координат центра ваги деякої плоскої області:

$$\bar{x} = M_y/M, \quad \bar{y} = M_x/M, \quad M = \iint_D B(x,y) dx dy, \quad M_x = \iint_D yB(x,y) dx dy, \quad M_y = \iint_D xB(x,y) dx dy,$$

тут $B(x,y)$ - неперервне зображення об'єкта. Аналогічні формули мають місце в дискретному просторі, при цьому $B(i,j)$ багатоградаційне зображення об'єкта:

$$M = \sum_i \sum_j B(i,j), \quad M_x = \sum_i \sum_j jB(i,j), \quad M_y = \sum_i \sum_j iB(i,j).$$

На основі цих формул пропонується ітераційна модель та алгоритм обчислення координат центра ваги (центроїди) одномірних та двомірних масивів цифрової інформації.

Так знаходження координати центра ваги вектора, заданого цифровими координатами $V(1), V(2), \dots, V(n)$, виконується за ітераціями

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} \frac{\sum_{k=i-1}^n B(k)}{\sum_{k=i}^n B(k)+1}, \quad \bar{x}_0 = 1.$$

Тоді $\bar{x}_n = \bar{x}$ для всього початкового вектора. Перевагою запропонованого метода обчислень є той факт, що за кожні i проведених ітерацій можливо безпосередньо і зразу ж вказати центр ваги частини вектора початкової

цифрової інформації, розташованої в позиціях від **i** до **n**. Центр ваги цієї частини інформації можливо задати відносно початку відліку, скориставшись співвідношенням $i + \bar{x}_i$, або останньої точки відліку - $n - i - \bar{x}_i$.

Знаходження координат центра ваги матриці цифрової інформації (цифрового зображення) $B(i, j), i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ знаходимо за аналогічними співвідношеннями:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} \sum_{k=i-1}^n \sum_{j=1}^m B(k, j) / \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^m B(k, j) + 1 = \bar{x}_{i-1} \sum_{k=i-1}^n \bar{B}(k) / \sum_{k=i}^n \bar{B}(k) + 1$$

$$\bar{y}_j = \bar{y}_{j-1} \sum_{k=j-1}^m \sum_{i=1}^n B(i, k) / \sum_{k=j}^m \sum_{i=1}^n B(i, k) + 1 = \bar{y}_{j-1} \sum_{k=j-1}^m \bar{B}(k) / \sum_{k=j}^m \bar{B}(k) + 1$$

Для початкової ітерації $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 1$, і остаточно $\bar{x}_n = \bar{x}$, $\bar{y}_m = \bar{y}$.

Проміжні ітерації \bar{x}_i, \bar{y}_j визначають відповідну координату центра ваги частини матриці для стовпців починаючи з **j** до **m** або для рядків починаючи з **i** до **n**. Відповідні значення центроїди можливо перерахувати відносно точки початку координат, а також будь-якої іншої точки вибраної системи координат. Результати дослідження промодельовані експериментально. На прикладі 1 показано знаходження координат центра ваги вектора класичним способом, той же самий результат отримаємо на прикладі 2 запропонованим методом ($\bar{x} = 9,175399$). На прикладі 3 промодельовано знаходження центроїди бінарного зображення об'єкта (фон-зображення) запропонованим методом.

52	1	52	1756	9,175399	16112
64	2	128	1704	8,424883	
120	3	360	1640	7,714634	
160	4	640	1520	7,244737	
100	5	500	1360	6,979412	
120	6	720	1260	6,453968	
110	7	770	1140	6,02807	
146	8	1168	1030	5,565049	
95	9	855	884	5,319005	
100	10	1000	789	4,839037	
120	11	1320	689	4,396226	
100	12	1200	569	4,112478	
76	13	988	469	3,776119	
80	14	1120	393	3,312977	
90	15	1350	313	2,904153	
52	16	832	223	2,672646	
65	17	1105	171	2,181287	
42	18	756	106	1,90566	
32	19	608	64	1,5	
32	20	640	32	1	
1756	9,175399	16112			1

Пр. 1

Пр. 2

Таким чином даний ітераційний метод знаходження центроїди масивів цифрової інформації є універсальним, має розширені функціональні за рахунок обчислення проміжних центроїд можливості, сама структура алгоритма є послідовно-паралельною, що позитивно впливає на швидкодію обчислень. Запропонованим методом можливо знаходження моментів більш високих порядків для масивів інформації.

0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	1	0,001	0,001	0,001
0,001	0,001	1	1	1	0,001	0,001	0,001
0,001	0,001	1	1	1	1	0,001	0,001
0,001	1	1	1	1	1	0,001	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	1	1	1	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	1	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
0,008	1,007	3,005	3,005	5,003	3,005	2,006	0,008
17,047	17,039	16,032	13,027	10,022	5,019	2,014	0,008
4,705109	3,706849	2,876871	2,309818	1,702554	1,402869	1,003972	1
0,008	1,007	3,005	3,005	5,003	3,005	2,006	0,008
0,007	1,006	3,004	3,004	5,002	3,004	2,005	0,007
0,006	1,005	3,003	3,003	4,002	3,003	2,004	0,006
0,005	1,004	2,003	2,003	3,002	3,002	2,003	0,005
0,004	1,003	1,003	1,003	2,002	2,002	2,002	0,004
0,003	0,003	0,003	0,003	1,002	1,002	2,001	0,003
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	1,001	0,002
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
4,5	4,996028	4,001331	4,001331	4,0008	4,998669	6,492024	4,5
4	4	3,00233	3,00233	3,001399	4	5,494763	4
3,5	3,002985	2,002997	2,002997	2,501499	3,000999	4,497006	3,5
3	2,00498	1,503744	1,503744	2,001666	2,001666	3,498752	3
2,5	1,005982	1,005982	1,005982	1,501998	1,501998	2,5	2,5
2	2	2	2	1,002994	1,002994	1,50075	2
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,000999	1,5
1	1	1	1	1	1	1	1
76,7115	85,12732	64,14934	52,12534	40,09601	25,08832	13,07494	0,036
356,4088	279,6973	194,5699	130,4206	78,29527	38,19926	13,11094	0,036
3,060357	2,625443	2,336599	1,994026	1,655802	1,344167	1,002746	1

Пр.3

Література:

1. Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К. Распознавание и цифровая обработка изображений: Учебн. пособие.-М: Высш., шк., 1983-295с.
2. Бойко Р.В., Комаров В.А., Красиленко В.Г., Быстродействующий метод вычисления моментных признаков при обработке изображений // Автометрия. 1989, №6, с.16-22.
3. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и

практика. -М.: Горячая линия-Телеком, 2002-382 с.

4. Патент України №6204, G06K9/58, 9/52. Спосіб розпізнавання симетричностей зображень об'єктів і пристрій для його реалізації / Кожемяко В.П.,

5. Красиленко В.Г., Мартинюк А.Г., Буда А.Г., Бюл. №6-1-1994

*асистент Шевчук О.Ф., студент Готовко О.Ю.
Вінницький національний аграрний університет*

ПРО АНОМАЛЬНІ РІВНІ В РЯДАХ ДИНАМІКИ

*Розкрито причини появи аномальних рівнів ряду динаміки,
алгоритм їх визначення та методи усунення*

Сучасні дослідження макроекономічної динаміки, процесів перехідної економіки, фінансових ринків спираються на аналіз взаємозв'язків соціально-економічних даних, що має вигляд часових рядів. Урахування часової структури даних щодо реальних економічних процесів дозволяє адекватно відображати їх в економіко-математичних моделях. Усвідомлення цього факту зумовило як ревізію багатьох макроекономічних теорій, так і бурхливий розвиток специфічних методів аналізу таких даних. Знання цих методів і способів застосування їх до прогнозування соціально-економічних процесів є необхідною складовою підготовки економістів-дослідників (аналітиків).

Однією із основних задач економіко-математичного моделювання є складання прогнозу досліджуваних явищ. Така інформація є досить важливою і необхідною при ефективному управлінні підприємством.

Прогнозні значення, здебільшого, отримуються за допомогою кореляційно-регресійної моделі динамічного ряду.

Але, слід відзначити, що перед проведенням кореляційно-регресійного аналізу необхідна перевірка значень ряду динаміки на наявність аномальних рівнів. Нажаль, цей етап досить часто ігноруються аналітиками, що призводить до втрати певної частини важливої інформації, яка спостерігалась в минулому, і внаслідок цього виникнення можливих помилкових прогнозних значень моделі.

Поява аномальних значень може бути викликана помилками при зборі, записі або передачі інформації – це помилки технічного порядку або помилки першого роду. Помилки першого роду слід виявляти й виправляти. Крім того, аномальні рівні в часових рядах можуть виникати через помилки другого роду: значення відображають об'єктивний розвиток процесу, але істотно відхиляються від загальної тенденції розвитку процесу, наприклад, стрибок курсу долара або падіння курсу цінних паперів на фондовому ринку та інше. Ці помилки трапляються епізодично, тобто дуже рідко, і не підлягають усуненню.

Щоб виявити аномальність здійснюють, порівняння, а це означає, що рівні часових рядів повинні мати однакові одиниці вимірювання, однакову періодичність обліку окремих спостережень, однаковий ступінь агрегування, обчислюватися за тією самою методикою.

Для виявлення аномальних рівнів часових рядів використовують методи, призначені для статистичних сукупностей, наприклад, метод Ірвіна. Суть його полягає у наступному: для динамічного ряду $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots, \mathfrak{Z}_n$ необхідно обчислити значення λ_i за формулою:

$$\lambda_i = \frac{|\mathfrak{Z}_i - \mathfrak{Z}_{i-1}|}{\sigma_{\mathfrak{Z}}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ – середнє квадратичне відхилення ряду.

Після чого, розраховані значення $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, порівнюються з табличним значенням критерію Ірвіна λ_{α} ; якщо якесь із значень λ_i виявиться більшим за табличне, то відповідне значення \mathfrak{Z}_i рівня ряду динаміки вважають аномальним. Значення критерію Ірвіна для рівня значущості $\alpha = 0,05$ подано у табл. 1.

Таблиця 1

<i>n</i>	2	3	10	20	30	50	100
λ_{α}	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

Відмітимо, що критерій Ірвіна не «сприймає» аномальність, якщо вона виявляється в середині ряду зі стрімкою динамікою, тобто коли стрибок великий, але не перевищує рівнів наприкінці періоду спостережень.

Також, якщо значення наприкінці часового ряду «випадає» із загальної тенденції, то без додаткової інформації стосовно причин «випадіння» в кінці ряду неможливо визначити, чи це спостереження аномальне, чи відбувається зміна тенденції. У цьому разі важливо провести якісний аналіз змін, що відбуваються, або дочекатися надходження результатів нового спостереження.

Після виявлення аномальних рівнів необхідно визначити причини їх виникнення. Якщо вони викликані помилками технічного порядку, то вони усуваються або заміною аномальних рівнів відповідними значеннями по кривій, по якій апроксимує часовий ряд, або заміною рівнів середньої арифметичної двох сусідніх рівнів ряду. Помилки, що виникають за причиною впливу факторів, які мають об'єктивний характер, усуненню не підлягають.

Отже, діагностика на виникнення аномальних рівнів ряду динаміки та їх усунення є важливим етапом, що передує основному дослідженню, і дозволяє знизити ризик використання некоректної інформації при побудові економіко-математичної моделі.

Література:

1. Євсєєва О.О. Впровадження науково-практичного дослідження та удосконалення його методичного інструментарію: оцінка показників дослідження на аномальність / О.О. Євсєєва // Вісник економіки транспорту і промисловості. – К. – 2010. – №31. – С. 87-92.

2. Найко Д.А. Про існування тренду інтегрального показника фінансової стійкості тестового підприємства / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету.

Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 168-174.

3. Найко Д.А. Інтегральний показник фінансової стійкості тестового підприємства: прогноз та адекватність моделі / Найко Д.А., Шевчук О.Д., Шевчук О.Ф. // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія: Економічні науки / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця, 2010. – Випуск 5, том 3. – С. 174-182.

*доц. Левчук О.В., студентка Шкарбуль І.
Вінницький національний аграрний університет*

СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ АГРОЕКОСИСТЕМ

Здійснено огляд статистичних моделей агроєкосистем

Статистичні моделі будуються з припущенням, що досліджуваний процес випадковий і може бути вивчений за допомогою статистичних методів аналізу систем [1]. Вони включають: емпіричні і динамічні статистичні моделі, кореляційний та факторний аналіз, багатовимірне шкалювання, аналіз тимчасових рядів. Для зниження розмірності статистичних моделей використовується низка методів, наприклад виділення головних компонент у регресійних рівняннях та гармонійних рядах [2].

В історії розробки статистичних моделей продуктивності агроценозів можна виділити кілька етапів: за узагальненими агрокліматичними показниками; емпіричним рівнянням регресійного типу; динаміко-статистичними та фізико-статистичними моделями; комплексним імітаційним моделям.

Методи прогнозування врожаїв, засновані на обліку агрокліматичних ресурсів регіону розроблялися в агрометеорології. Для оцінки потенційної продуктивності використовуються величини балансу фотосинтетично активної радіації (ФАР), а також комплексні показники – біокліматичний і гідротермічний потенціали продуктивності (БКП, ГТП).

Емпіричні моделі продуктивності агроценозів в основному представлені так званими виробничими функціями. Вони представляють регресійні рівняння, що пов'язують кінцевий результат (урожай та показники його якості) з діючими величинами. До виробничих функцій пред'являється низка вимог: модель має враховувати основні фактори, що впливають на врожай; охоплювати широкий діапазон їх значень; апроксимуюча функція має максимально відповідати реальним біологічним закономірностям. Важливий внесок у створення емпіричних моделей продуктивності внесли роботи Т.І. Іванової, А.П. Федосєєва, І.М. Стребкова, Є.С. Уланової та інших дослідників.

Динамічні моделі призначені для прогнозування і оперативного управління виробничим процесом з урахуванням обставин, що склалися. В основі динамічного моделювання – опис системи за допомогою звичайних

диференційних рівнянь в часних похідних, параметри яких визначають за емпіричними даними.

До емпірико-статистичних (регресійних) відносяться багато моделей ґрунтової ерозії (Універсальна модель втрат ґрунту USLE або її модифікація – RUSLE), моделі WEPP, CREAMS). Емпірико-статистичні моделі застосовуються в фітопатології для опису динаміки епіфітотій.

До статистичних моделей в агроекології можна також віднести банки даних, що містять параметри статистичних розподілів показників стану ґрунтів (морфологічних, хімічних, фізичних та інших), а також результатів польових агрохімічних експериментів. Є досвід використання агрохімічних банків даних при побудові моделей продуктивності агроценозів.

Зауважимо, що результати експериментів завжди містять деяку випадкову похибку. Причому часто похибка є одного порядку з досліджуваною величиною. В таких випадках застосовують регресійний аналіз. Регресією називають підбір параметрів тієї чи іншої елементарної функції для найкращої апроксимації експериментальних даних. Лінійна регресія є найбільш простою, проте використовується найчастіше. У своєму дослідженні залежності між кількістю шкідливих викидів в атмосферу – VX ($m^3 / год$) одним із підприємств та рівнем захворюваності дихальних шляхів мешканців цього району – VY (ос./міс.), ми застосували саме її, оскільки коефіцієнт кореляції (0,947) близький за модулем до одиниці. Завдання полягало у відшуванні таких параметрів a та b , щоб пряма $y = ax + b$ найкращим чином апроксимувала отриманий експериментальним шляхом набір точок.

Ми використали математичний програмний пакет Mathcad, оскільки він містить чисельну кількість вбудованих функцій для здійснення регресійного аналізу та зручний графічний інтерфейс.

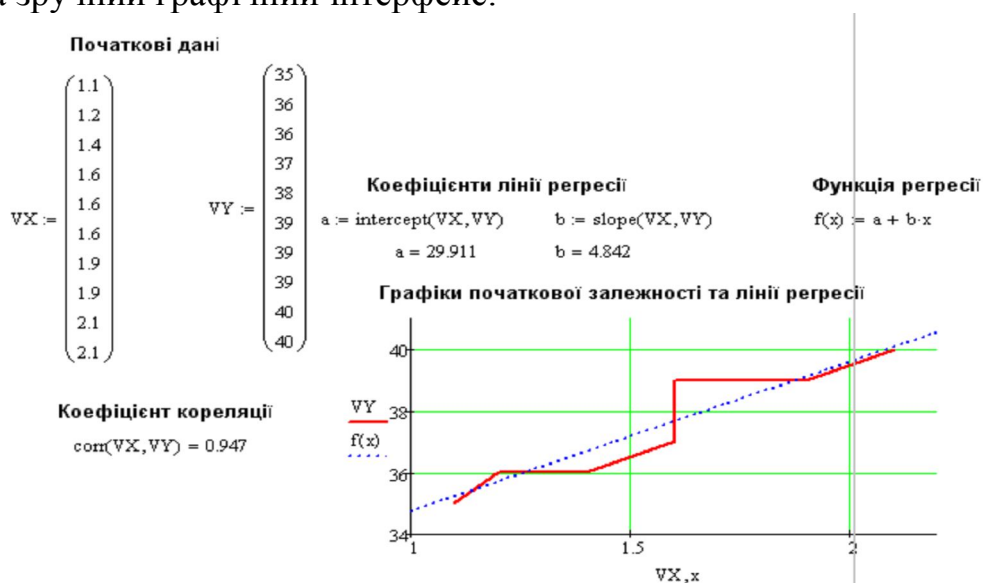


Рис.1. Регресійний аналіз в Mathcad

Проаналізувавши отримані результати, ми зробили висновок, що оскільки коефіцієнт регресії $b = 4,842 > 0$, то кореляція між кількістю викидів та захворюваністю пряма. Якщо шкідливі викиди в атмосферу збільшаться на

1 ($m^3 / год$) то середня захворюваність за певний період зросте приблизно на 5 осіб.

Література:

1. Лапко А.В., Крохов С.В., Ченцов С.И., Фельдман Л.А. Обучающиеся системы обработки информации и принятия решений. – Новосибирск: Наука, 1996. – 284 с.
2. Региональные экологические информационно-моделирующие системы (отв. ред. Ф.Г. Унгер). – Новосибирск: Наука, 1993. – 132 с.

асистент Бубновська І.А., студентка Дрижук Н.В.

Вінницький національний аграрний університет

**АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОДЕЛІ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ
ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАСОБІВ СИСТЕМИ МАТНСАД**

Розглянуто модель міжгалузевого балансу, проаналізовано вплив зміни елементів матриці прямих затрат на продуктивність.

Використання моделей міжгалузевого балансу на регіональному рівні дає змогу аналізу та прогнозування потенціалу регіону і перспектив його нарощування, зокрема розвитку системи виробництва та споживання продукції населенням .

Розглянемо модель "витрати-випуск" Леонт'єва, в основі побудови якої покладено апарат матричних перетворень (найпростіший випадок для n галузей):

$$X = AX + Y, \quad (1)$$

де X_i - валовий випуск в i - й галузі; Y_i – об'єм кінцевого споживання в i - й галузі, $A = (a_{ij})_n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат (технологічна матриця), елементи a_{ij} ($0 \leq a_{ij} \leq 1$) (коефіцієнти прямих витрат) якої дорівнюють об'єму продукції i - ї галузі, що використовується в j -й галузі для виробництва одиниці продукції [1].

В моделі міжгалузевого балансу зазвичай приймається припущення про незмінність технологій у всіх виробничих галузях, тобто розглядається постійна матриця прямих витрат. Але під впливом різних причин (факторів) можуть змінюватися технології виробництва, у зв'язку із чим об'єм продукції i -ї галузі, що використовується в j -й галузі для виробництва одиниці продукції зміниться на деяку величину δa_{ij} . Проаналізуємо чутливість моделі міжгалузевого балансу стосовно змін матриці прямих витрат.

Розглянемо матрицю $B = A + \delta A$, яка зазнала зміни тільки по одному елементу a_{11} , де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - продуктивна матриця другого порядку,

$$\delta A = \begin{pmatrix} \delta a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{матриця збуджень.}$$

Використовуючи засоби пакету Mathcad проведемо дослідження продуктивності матриці B від величини збуджень.

Для цього знайдемо значення елементів матриці B та перевіримо існування B^{-1} (оберненої до матриці $B' = E - B$) для виконання першого критерію продуктивності.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \delta A := \begin{pmatrix} \delta a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := A + \delta A \quad B \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + \delta a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B' := E - B$$

$$B' \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a_{11} - \delta a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B'^{-1} \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \frac{(-1 + a_{22})}{(-1 + a_{22} + a_{11} - a_{11} \cdot a_{22} + \delta a_{11} - \delta a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} & \frac{-a_{12}}{(-1 + a_{22} + a_{11} - a_{11} \cdot a_{22} + \delta a_{11} - \delta a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} \\ \frac{-a_{21}}{(-1 + a_{22} + a_{11} - a_{11} \cdot a_{22} + \delta a_{11} - \delta a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} & \frac{(-1 + a_{11} + \delta a_{11})}{(-1 + a_{22} + a_{11} - a_{11} \cdot a_{22} + \delta a_{11} - \delta a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21})} \end{array} \right]$$

Лістинг 1.

Щоб матриця B була продуктивною необхідно, щоб всі її елементи були додатними та сума елементів кожного рядка не перевищувала одиниці (за другим критерієм продуктивності) [1]. З цих умов знаходимо обмеження для збудження: $-a_{11} \leq \delta a_{11} < 1 - a_{11} - a_{12}$ (2). При виконанні (2) чисельники B'^{-1} додатні. Тому необхідно і достатньо, щоб знаменник був додатній. Звідси одержуємо:

$$\delta a_{11} < \frac{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}{1 - a_{22}} = \frac{|E - A|}{1 - a_{22}},$$

де E - одинична матриця другого порядку.

Отже, для матриць збуджень, які мають тільки один ненульовий елемент δa_{ij} матриця B буде продуктивною, якщо для δa_{ij} виконується умова:

$$-a_{ij} \leq \delta a_{ij} < \min(1 - a_{i1} - a_{i2}, \frac{|A'|}{1 - a_{ij}}) \quad (3)$$

Дослідимо зміни міжгалузевого потоку x_i , якщо $Y = const$, при зміні виробничої матриці 2-го порядку A на $\tilde{A} = A + \delta A$. Рівняння (1) для елементів матриці $\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i$, ($i = 1, 2$), буде мати вигляд: $\tilde{X} = \tilde{A}\tilde{X} + Y$. Або:

$$\tilde{X} = \tilde{A}\tilde{X} + X - AX \quad (4)$$

Перейдемо від матричного запису (4) до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \delta x_1 = a_{11} \delta x_1 + \delta a_{11} (x_1 + \delta x_1) + a_{12} \delta x_2 \\ \delta x_2 = a_{21} \delta x_1 + \delta a_{22} \delta x_2 \end{cases} \quad (5)$$

Виражаємо значення δx_2 та δx_1 з системи:

$$\delta x_2 = \frac{a_{21} \delta x_1}{1 - a_{22}}$$

$$\delta x_1 = \frac{x_1 \delta a_{11} (1 - a_{22})}{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} - \delta a_{11} + \delta a_{11} a_{22}} = \frac{x_1 \delta a_{11} (1 - a_{22})}{|E - \tilde{A}|}$$

Знайдемо відношення:

$$\frac{\delta x_1}{x_1} = \frac{\delta a_{11} (1 - a_{22})}{|E - \tilde{A}|} \quad (6)$$

Формула (6) дає змогу оцінити залежність відносної зміни міжгалузевго потоку x_i від зміни значень елементу δa_{ij} .

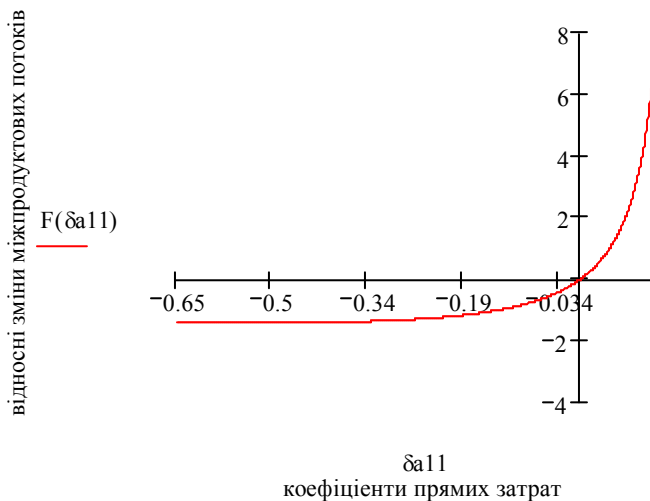
Приклад. Нехай маємо продуктивну матрицю $A = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,23 \\ 0,35 & 0,58 \end{pmatrix}$.

Розрахуємо критичні значення для δa_{ij} по нерівності (2) та побудуємо залежність відносної зміни міжгалузевго потоку першої галузі x_1 від δa_{ij} .

$$a_{11} := 0.65 \quad a_{12} := 0.23 \quad a_{21} := 0.35 \quad a_{22} := 0.58 \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \delta a_{11 \min} := -a_{11} \quad \delta a_{11 \max} := 1 - a_{11} - a_{12}$$

$$\delta a_{11 \min} = -0.65 \quad \delta a_{11 \max} = 0.12$$

$$F(\delta a_{11}) := \delta a_{11} \cdot \frac{[1 + \delta a_{11} \cdot (1 - a_{22})]}{1 - a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} + a_{11} \cdot a_{22} - \delta a_{11} + a_{22} \cdot \delta a_{11}}$$



Л

Лістинг 2.

Як видно з лістингу 2 у випадку збільшення прямих витрат зростання коефіцієнтів прямих витрат δa_{11} першої галузі відбувається значно повільніше, ніж відносної зміни потоків цієї ж галузі. У випадку зменшення прямих витрат, коефіцієнт прямих витрат цієї галузі швидше знижується, ніж відносна зміна об'єму продукції.

Використання програмного пакету Mathcad спрощує аналіз моделі міжгалузевих зв'язків при зміні матриці прямих виробничих витрат (лістинги 1, 2). Для дослідження (див. приклад) достатньо змінити значення коефіцієнтів в лістингу 2, розрахунки та побудова залежності відбуваються автоматично [2].

Це суттєво полегшує процес прогнозування продуктивності матриці, при її зміні, тобто розрахунки запланованого об'єму кінцевого споживання, якщо задано технологію виробництва.

Література:

1. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике /Ю.П.Иванилов, В.А. Лотов// - М. : Наука, 1979.
2. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / Салманов О.Н.// - ВНУ, 2003.

*доц. Левчук О.В, студент Доліщук С.
Вінницький національний аграрний університет*

ПРОБЛЕМА МОДЕЛЮВАННЯ В АГРОЕКОЛОГІЇ ТА КЛАСИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ

Піднімається проблема моделювання в агроекології. Розглядаються класи моделей. Наводиться приклад використання стислих моделей з використанням інформаційних технологій

Основна ідея моделювання полягає в заміні існуючого об'єкта його аналогом. Інформаційні моделі являють характеристики об'єкта у вигляді даних в якійсь системі. Математичні – формалізують закономірності динаміки об'єкта у вигляді чисельних співвідношень. При цьому реалізується фундаментальне поняття спостережливості, яке полягає в можливості для стороннього отримувати інформацію про минуле об'єкта вивчення, на цій основі передбачати майбутнє та успішно ним керувати [1,2 та ін.]. Математичне моделювання – один з основних інструментів системного аналізу, що дозволяє в ряді випадків уникнути трудомістких і дорогих натурних експериментів. На основі результатів прогнозування динаміки геосистем вирішуються питання раціонального застосування добрив і засобів захисту рослин, проведення комплексної меліорації та окультурення полів, оптимізації структури землекористування та інші [3]. Ведуться дослідження в галузі організації "ландшафтного землеробства" – оптимізації сільськогосподарського використання земель в залежності від місцевих умов (рельєфу, клімату, ґрунтових умов, розміщення інших господарських об'єктів) [4,5].

Діапазон і масштаб модельованих процесів вкрай великий – від глобальної екології до прогнозування динаміки окремих компонентів агроценозів. Багато авторів виділяють статичні та динамічні моделі [6]. Статичні моделі формалізують зв'язок між показниками без урахування змінної часу. Динамічні моделі використовуються для оцінки явищ у розвитку [7]. Функціональні моделі відрізняються від емпіричних тим, що враховують механізм процесу. Це дозволяє використовувати їх для прогнозу станів об'єкта, які не спостерігалися раніше [8]. В описі перебігу невизначених процесів в

природних системах (агrometeorологічні умови, міграція речовин по профілю ґрунтів, трансформація пестицидів, виділення кордонів ґрунтових ареалів, виникнення спалахів хвороб рослин, динаміка чисельності шкідників та інших) краще використовувати імовірнісні підходи [9]. Найважливішим завданням моделювання є прогнозування й управління об'єктом. Тому виділяються моделі без управління і оптимізаційні (за участю однієї або декількох сторін). Найчастіше застосовуються: статистичні, матричні, балансові динамічні моделі, моделі математичної фізики (дифузні), моделі теорії дослідження операцій, часткові моделі типу "ресурс-споживач" та подібні до них, а також ціла група дискретних математичних моделей.

У наших останніх дослідженнях ми використовували статистичні моделі. Обробку даних та візуалізацію здійснювали з використанням інформаційних технологій. В наведеному прикладі використовується програмний математичний пакет Mathcad.

Широко поширеним завданням в процесі обробки даних є подання результатів експериментів деякою функцією $y(x)$. Завдання регресійного аналізу полягає в отриманні параметрів цієї функції, що описує (апроксимує) експериментальні дані, задані векторами VX та VY з найменшою середньоквадратичною похибкою.

У нашій роботі було задано результати вибіркового спостереження за внесенням органічних і мінеральних добрив на 1 га посівів (ц.д.р.) – VX , та урожайністю зернових культур (ц/га.) – VY . Ми поставили завдання: знайти рівняння регресії між урожайність та кількістю внесених добрив, провести аналіз отриманого рівняння та побудувати лінію регресії.

Початкові дані

$$VX := (1.1 \ 1.2 \ 1.4 \ 1.4 \ 1.6 \ 1.9 \ 2.1)^T$$

$$VY := (35 \ 38 \ 39 \ 40 \ 41 \ 38 \ 36)^T$$

Коефіцієнти лінії регресії

$$k := \text{regress}(VX, VY, 2)$$

Коефіцієнт кореляції

$$\text{corr}(VX, VY) = -6.186 \times 10^{-3}$$

$$k_3 = -10.085 \quad k_4 = 63.092 \quad k_5 = -19.679$$

Функція регресії

$$f2(x) := k_3 + k_4 x + k_5 x^2$$

$$k = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -10.085 \\ 63.092 \\ -19.679 \end{pmatrix}$$

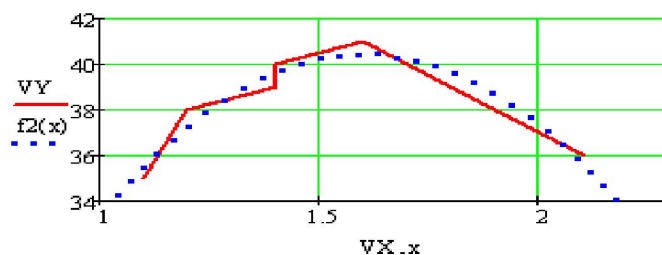


Рис. 1 Здійснення регресійного аналізу в середовищі Mathcad

Насамперед нами був розрахований коефіцієнт кореляції двох множин VX та VY . Цей коефіцієнт (0,006) близький за модулем до нуля, тому ми зробили висновок, що лінійною залежністю табличні дані будуть описані не точно. У своїй роботі ми здійснили поліноміальну регресію, тобто апроксимацію табличної залежності поліномом n -го степеня (Рис. 1). У нашому випадку – оптимальна кількість добрив за інших незмінних умов – 1,6 ц.д.р.

Отже застосування методу моделювання з використанням інформаційних технологій значно розширює діапазон методів наукового дослідження, дозволяє їх здійснювати на якісно вищому рівні.

Література:

1. Минеев В.Г., Дебрецени Б., Мазур Т. Биологическое земледелие и минеральные удобрения. -М.: Колос, 1993. -415 с.
2. Кирюшин В.И. Экологические основы земледелия. -М.: Колос, 1996. - 367с.