



Всеукраїнський науково-технічний журнал

Ukrainian Scientific & Technical Journal

ISSN 2306-8744

DOI: 10.37128/2306-8744-2021-4

Вібрації в техніці та технологіях



Всеукраїнський науково-технічний журнал

Ukrainian Scientific & Technical Journal

Вібрації в техніці та технологіях

№ 4 (103)

Вінниця 2021

**ВІБРАЦІЇ В
ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Журнал науково-виробничого та навчального
спрямування Видавець: Вінницький національний
аграрний університет

Заснований у 1994 році під назвою “Вібрації в техніці та
технологіях”

*Свідоцтво про державну реєстрацію засобів масової
інформації*

КВ № 16643-5115 ПР від 30.04.2010 р.

*Всеукраїнський науково-технічний журнал “Вібрації в техніці та
технологіях” / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця,
2021. – 4 (103) – 120 с.*

*Друкується за рішенням Вченої ради Вінницького національного аграрного
університету (протокол № 6 від 24.12.2021 р.)*

*Періодичне видання включено до Переліку наукових фахових видань
України з технічних наук (Категорія «Б» Наказ Міністерства освіти і науки
України від 02.07.2020 р. № 886)*

Головний редактор

Калетнік Г.М. – д.е.н., професор,
академік НААН України, Вінницький
національний аграрний університет

**Заступник головного
редактора**

Адамчук В.В. – д.т.н., професор, академік
НААН України, Національний науковий
центр “Інститут механізації та електрифікації
сільського господарства”

Відповідальний секретар

Солона О.В. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Члени редакційної колегії

Булгаков В.М. – д.т.н., професор, академік
НААН України, Національний університет
біоресурсів і природокористування України

Граняк В.Ф. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Деревенько І. А. – к.т.н., доцент,
Національний університет «Львівська
політехніка»

Зіньковський А.П. – д.т.н., професор,
Інститут проблем міцності імені Г. С.
Писаренка НАН України

Купчук І.М. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Матвєєв В.В. – д.ф.-м.н., професор,
академік НАН, Інститут проблем міцності
імені Г.С. Писаренка НАН України

Полєвода Ю.А. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Севостьянов І.В. – д.т.н., професор,
Вінницький національний аграрний
університет

Твердохліб І.В. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Токарчук О.А. – к.т.н., доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Цуркан О.В. – д.т.н. доцент, Вінницький
національний аграрний університет

Зарубіжні члени редакційної колегії

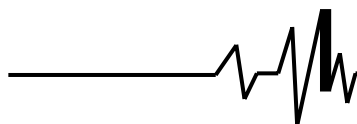
Максімов Джордан Тодоров – д.т.н., проф., Технічний Університет Габрово (Болгарія)

Технічний редактор **Замрій М.А.**

Адреса редакції: 21008, Вінниця, вул. Сонячна 3, Вінницький національний аграрний
університет, тел. 46 – 00– 03

Сайт журналу: <http://vibrojournal.vsau.org/>

Електронна адреса: vibration.vin@ukr.net

**З М І С Т****1. ТЕОРІЯ ПРОЦЕСІВ ТА МАШИН**

<i>Цуркан О.В.</i> АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙНИХ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ СУШІННЯ НАСІННЯ ГАРБУЗА.....	5
<i>Булгаков В. М., Адамчук В.В., Кувачов В.П., Солоня О. В.</i> ОЦІНЮВАННЯ ЕНЕРГОНАСИЧЕНОСТІ ШИРОКОКОЛІЙНИХ (ПОРТАЛЬНИХ) ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ.....	15
<i>Коц І. В, Куриленко Ю. П.</i> РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ГЛИБИННИХ ВІБРАТОРІВ З ГІДРОІМПУЛЬСНИМ ПРИВОДОМ ДЛЯ УЩІЛЬНЕННЯ БЕТОННИХ СУМІШЕЙ	26
<i>Савєлов Д. В.</i> ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМУ РОБОТИ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ «ВІБРАЦІЙНА ПЛИТА - ПОЛІМЕРНИЙ БЕТОН» ПІД ЧАС ПОВЕРХНЕВОГО УЩІЛЬНЕННЯ	33
<i>Мельник В. М., Косова В. П., Жуковська К. В.</i> АВТОМАТИЧНЕ КЕРУВАННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИМ СТАНОМ РОБОЧОЇ РІДИНИ В БІОРЕАКТОРІ НА РЕЗОНАНСНОМУ РІВНІ.....	41
<i>Бабин І. А.</i> ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНОЇ ВІБРАЦІЇ ПЕРІОДИЧНО ПРАЦЮЮЧОГО ІНЖЕКТОРА СИСТЕМИ ПРОМИВАННЯ ДОІЛЬНИХ УСТАНОВОК.....	47
<i>Омельянов О.М.</i> ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ОЦІНКА ЕНЕРГЕТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ОБ'ЄМНОЇ ВІБРОСЕПАРАЦІЇ СИПКОЇ ПРОДУКЦІЇ.....	61

2. МАШИНОБУДУВАННЯ ТА МАТЕРІАЛООБРОБКА

<i>Сивак Р.І., Залізняк Р.О.</i> ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИКИ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗМІННИХ ЕЙЛЕРА І ЛАГРАНЖА.....	68
<i>Дудчак В.М., Пришляк В.М.</i> МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НАПОВНЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ СТРУКТУР РОБОЧИХ ОРГАНІВ БУНКЕРНОГО ТИПУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН МАТЕРІАЛАМИ СФЕРИЧНОЇ ФОРМИ.....	77

3. ПЕРЕРОБНІ ТА ХАРЧОВІ ВИРОБНИЦТВА

<i>Яремчук О. С., Новгородська Н. В.</i> ВИКОРИСТАННЯ УЛЬТРАЗВУКУ У ВИРОБНИЦТВІ ФЕРМЕНТОВАНИХ КИСЛОМОЛОЧНИХ ПРОДУКТІВ.....	90
<i>Берник І. М.</i> ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ УЛЬТРАЗВУКОВОЇ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ДІЇ ПРИ ОБРОБЦІ ХАРЧОВОЇ СИРОВИНИ.....	99
<i>Спірін А.В., Цуркан О.В., Твердохліб І.В., Омельянов О.М.</i> ШЛЯХИ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА НАСІННЯ ТРАВ.....	110

**Сивак Р. І.**

д.т.н., доцент

Залізник Р.О.

аспірант

*Вінницький національний
аграрний університет***Sivak R.**

Dr. Sc. of Eng., Associate Professor

Zalizniak R.

Postgraduate Student

*Vinnitsya National Agrarian
University***УДК 621.73.011.001.5****DOI: 10.37128/2306-8744-2021-4-8**

ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИКИ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗМІННИХ ЕЙЛЕРА І ЛАГРАНЖА

В механіці суцільних середовищ знайшли застосування дві еквівалентні одна одній точки зору на течію металу в процесі деформування – Ейлера та Лагранжа. Коли увагу концентрують на даній точці простору, в яку приходять різні частки суцільного середовища в процесі деформування – це сутність точки зору Ейлера на досліджуваний рух суцільного середовища. З погляду Лагранжа, рух вважається відомим, якщо швидкість, прискорення, температура та інші величини задані як функції координат точки простору та часу. Сутність погляду Лагранжа на вивчений рух полягає в тому, що увагу концентрують на конкретній частці суцільного середовища та досліджують історією її деформування та руху. Координати, що індивідуалізують точки суцільного середовища та час називаються змінними Лагранжа. Погляд Лагранжа на вивчення руху суцільного середовища лежить в основі фізичних законів, оскільки пов'язаний з рухом окремих часток. У початковий момент координати певної точки по Ейлеру та Лагранжу збігаються.

В статті розглядається можливість застосування змішаних координат Ейлера та Лагранжа для визначення компонент тензора швидкостей деформацій в процесах пластичного деформування. Доцільність підходу Лагранжа та Ейлера з'ясовується в конкретних задачах. При цьому слід враховувати, що в координатах Ейлера рівняння рівноваги мають більш простий вигляд (вони лінійні), а граничні умови – складніший внаслідок того, що неможливо, не розв'язуючи задачі, визначити компоненти переміщення, які зазвичай входять до граничних умов. У координатах Лагранжа крайові умови, як правило, записуються простіше, а рівняння рівноваги – складніше.

При обробці металів тиском метал зазнає значні деформації. Однак кожен процес зручно розглядати у кожний фіксований момент його протікання, тому необхідне знання основних положень та залежностей, що відносяться до малих деформацій.

***Ключові слова:** змінні Лагранжа та Ейлера, деформації, тензор швидкостей деформацій, пластична течія, деформований стан, декартова система координат, частинна похідна.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Ефективність застосування сучасних програмних систем для інженерного аналізу у машинобудуванні загально визнана. Одним із напрямків розвитку таких систем є вдосконалення моделей, що використовуються для опису пластичної течії металів.

Технологія холодного об'ємного штампування деталей є найбільш ефективною у сучасному машинобудуванні [1]. Пластичне формоутворення деталей складної геометричної форми здійснюється за кілька технологічних переходів в умовах складного навантаження та немонотонної пластичної деформації [2]. Холодна деформація металів призводить до виникнення



деформаційної анізотропії механічних властивостей [3]. Перелічені особливості пластичної деформації при об'ємному холодному штампуванні обумовлюють складність її математичного моделювання. Класичні моделі пластичності, що використовуються у розрахункових ядрах існуючих на даний час програмних продуктів не описують зазначену деформацію, тому технологічні процеси обробки металів тиском розробляються на основі виробничого досвіду, що пов'язано із значними витратами. В останніх дослідженнях для достовірної оцінки впливу немонотонності пластичної деформації запропоновано різні підходи при створенні моделей пластичності [2-4]. Для розвитку технологій холодного об'ємного штампування металів необхідний апарат для адекватного математичного моделювання процесів деформування, ключовим компонентом якого є моделі (визначальні співвідношення) для опису кінематики пластичної течії металу [5-7].

Спосіб кінематичного описання визначається механічними властивостями середовища. Опис руху по Лагранжу з точки зору геометрії і механіки більш природний і послідовний. Такий підхід в розрахунках полегшує опис еволюції матеріальних тіл, фізичні властивості яких можуть змінюватися в залежності від їх механічного стану. Тобто підхід Лагранжа добре працює при описанні кінематики деформацій в механіці деформівного твердого тіла. Таким чином, використання підходу Лагранжа при моделюванні пластичної течії металу обумовлено фізичною (механічною) природою модельованого середовища деформівного твердого тіла. При цьому повне Лагранжеве формулювання рівнянь механіки суцільного середовища (відносно початкових координат) практично не використовується в дослідженнях особливостей кінематики деформування, а чисельний розв'язок рівнянь механіки деформівного твердого тіла при великих пластичних деформаціях заснований на спрощеній реалізації геометричних прийомів. Підхід Ейлера створює більш точну числову систему при розв'язку рівнянь механіки суцільного середовища.

Спосіб описання руху Ейлера або Лагранжа грає в моделюванні руху суцільного середовища визначальну роль. Тому існує необхідність у створенні методу із спільним використанням підходів Лагранжа і Ейлера для достовірного описання кінематики пластичної течії в тому числі і при немонотонній пластичній деформації.

Формулювання мети досліджень.

Метою досліджень є створення методу визначення компонент тензора швидкостей деформацій з використанням підходів Ейлера і Лагранжа описання руху суцільного середовища при пластичному деформуванні металу.

Викладення основного матеріалу

дослідження. Векторне поле переміщень \vec{u} в кожній точці простору відображає перетворення початкової (недеформованої) конфігурації в поточну і тому визначає конфігурацію деформованого тіла в просторі у певній системі відліку. Деформований стан тіла визначається зміною довжин елементарних елементів між двома сусідніми матеріальними точками $P_0(x_0, y_0, z_0)$ і $Q_0(x_0+dx_0, y_0+dy_0, z_0+dz_0)$ в початковому стані де $(dl_0)^2 = (dx_0)^2 + (dy_0)^2 + (dz_0)^2$ і $P(x, y, z)$ і $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ в поточній конфігурації в момент часу t , де $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Припущення, що точки P і Q залишаються при деформації нескінченно близько одна до одної приймається у всьому подальшому викладенні, це обмеження повинно виконуватись зокрема при можливих структурних деформаціях твердих тіл. Процес деформування розглядається в єдиній декартовій системі координат XYZ. Якщо розглянути вектори переміщень $\vec{u}_1(x_0, y_0, z_0, t)$ в точці P і $\vec{u}_1(x_0 + dx_0, y_0 + dy_0, z_0 + dz_0, t)$ в точці Q , то компоненти малої різниці векторів будуть мати вид:

$$du = dx - dx_0, dv = dy - dy_0, dw = dz - dz_0.$$

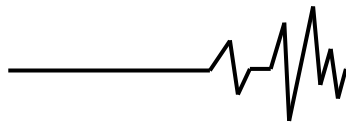
Зміна конфігурацій після деформації визначається квадратом довжини матеріального елемента. Зміна цієї довжини має вид

$$\begin{aligned} \frac{((dl)^2 - (dl_0)^2)}{2} &= dudx_0 + dvdy_0 + dwdz_0 + \frac{1}{2}((du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2) = \\ &= \varepsilon_{xx}(dx_0)^2 + \varepsilon_{yy}(dy_0)^2 + \varepsilon_{zz}(dz_0)^2 + 2(\varepsilon_{xy}dx_0dy_0 + \varepsilon_{yz}dy_0dz_0 + \varepsilon_{zx}dz_0dx_0) \end{aligned}$$

Шість безрозмірних коефіцієнтів $\varepsilon_{ij}(i,j=x,y,z)$ є деформаціями в точці P . Підставляючи диференціали u, v, w отримаємо

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u_i}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial u_i}{\partial z_0} dz_0 \quad (1)$$

де $du_x = dx, du_y = dy, du_z = dz$.



В будь-який поточний момент часу, якщо поле зміщень безперервне, то справедливі рівняння

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Отже, якщо рух точок описувати за допомогою змінних Лагранжа, то з врахуванням (1) [4, 5]

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0, \quad (3) \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь можна отримати у вигляді

$$dx_0 = \frac{\Delta_{01}}{D_0}, \quad dy_0 = \frac{\Delta_{02}}{D_0}, \quad dz_0 = \frac{\Delta_{03}}{D_0}, \quad (4)$$

де

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\Delta_{01} = dx \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} + dy \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \end{vmatrix} + dz \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

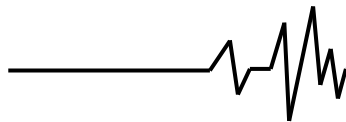
$$\Delta_{02} = dx \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \end{vmatrix} + dy \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \end{vmatrix} + dz \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$\Delta_{03} = dx \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \end{vmatrix} + dy \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \end{vmatrix} + dz \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix}$$

Якщо для опису руху використовувати змінні Ейлера, то

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(x, y, z), \\ y_0 &= y_0(x, y, z), \\ z_0 &= z_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогічно (3) отримаємо систему рівнянь



$$\begin{aligned} dx_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial x} dx + \frac{\partial x_0}{\partial y} dy + \frac{\partial x_0}{\partial z} dz, \\ dy_0 &= \frac{\partial y_0}{\partial x} dx + \frac{\partial y_0}{\partial y} dy + \frac{\partial y_0}{\partial z} dz, \quad (8) \\ dz_0 &= \frac{\partial z_0}{\partial x} dx + \frac{\partial z_0}{\partial y} dy + \frac{\partial z_0}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Порівнюючи залежності (4) і (8) з урахуванням залежностей (5), (6) знаходимо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial y_0}{\partial z} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} \right), \\ \frac{\partial x_0}{\partial y} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial z_0}{\partial x} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \\ \frac{\partial x_0}{\partial z} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial z_0}{\partial y} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right), \\ \frac{\partial y_0}{\partial x} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \right), & \frac{\partial z_0}{\partial y} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right), \\ \frac{\partial y_0}{\partial y} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial z_0}{\partial z} &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Швидкості зміщення будь-якої точки суцільного тіла, що деформується, в процесі його деформації можуть бути представлені як функції їх початкових (лагранжевих) координат x_0, y_0, z_0 і

часу t . Таким чином, в будь-який момент часу t складовими швидкості матеріальної точки, положення якої визначається поточними (ейлеровими) координатами x, y, z , будуть

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{dx}{dt} = v_x(x_0, y_0, z_0, t), \\ v_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{dy}{dt} = v_y(x_0, y_0, z_0, t), \\ v_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{dz}{dt} = v_z(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \quad (10)$$

На протязі нескінченно малого проміжку часу dt середовище зазнає нескінченно малу деформацію, що визначається переміщеннями $v_x dt, v_y dt, v_z dt$. Якщо компоненти цієї деформації

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (11)$$

розділити на dt отримаємо компоненти симетричного тензора швидкостей деформацій

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

аналогічно отримуємо решту компонент

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{dv_y}{dy}, \dot{\varepsilon}_z = \frac{dv_z}{dz}, \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_y}{dx} + \frac{dv_x}{dy} \right),$$



$$\dot{\epsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_z}{dy} + \frac{dv_y}{dz} \right),$$

$$\dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_x}{dz} + \frac{dv_z}{dx} \right). \quad (12)$$

Для визначення частинних похідних складових швидкості $v(v_x, v_y, v_z)$ по поточним координатам скористаємося правилом диференціювання складної функції. Тоді, частинні похідні складової v_x по поточним (ейлеровим) координатам будуть дорівнювати

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Виразимо частинні похідні початкових поточних координат по початковим, (лагранжевих) координат по поточним використовуючи при цьому залежності (9 (эйлеровим) координатам через частинні похідні

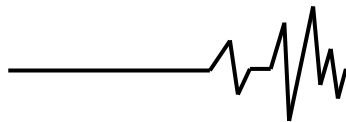
$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{1}{D_0} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x_0} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) \right], \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{D_0} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x_0} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \right], \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{1}{D_0} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x_0} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогічно можуть бути знайдені і відповідні значення похідних складових швидкостей v_y і v_z . Для цього необхідно замінити в залежностях (14) значення v_x на значення v_y і v_z .

Значення частинних похідних складових швидкості по координатам початкового стану можна, враховуючи (10), представити у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x_0} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial y_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial z_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial x_0} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial v_y}{\partial y_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial v_y}{\partial z_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial x_0} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial y_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial z_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Компоненти тензора швидкостей деформацій з врахуванням залежностей (12), (13) і (14) будуть дорівнювати



$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{D_0} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{1}{D_0} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{1}{D_0} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) \right], \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy} &= \dot{\gamma}_{xy}, \quad 2\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\gamma}_{yz}, \quad 2\dot{\varepsilon}_{zx} = \dot{\gamma}_{zx}\end{aligned}\tag{16}$$

Якщо виконується умова нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0,\tag{17}$$

то в залежностях (16) $D_0=1$.

В окремому випадку плоскої деформації

$$\frac{\partial z}{\partial z_0} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} = 0$$

залежності (16) суттєво спрощуються

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{D_0} \left[\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{1}{D_0} \left[-\frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \right],\end{aligned}\tag{18}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{D_0} \left[\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \right].$$

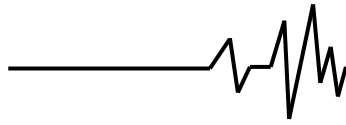
В процесах обробки тиском, для яких характерно наявність жорстких областей перед входом і на виході з пластичної зони, всі точки жорстких областей рухаються з однаковою і, в загальному випадку, непостійною швидкістю.

Якщо складові швидкості v_0 руху жорсткої області на вхідній границі з пластичною областю дорівнювати

$$v_{0x} = \frac{dx_0}{dt}, \quad v_{0y} = \frac{dy_0}{dt}, \quad v_{0z} = \frac{dz_0}{dt},\tag{19}$$

то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dx_0} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} v_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0} v_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial z_0} v_{0z},\end{aligned}$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy_0} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0} v_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0^2} v_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} v_{0z}, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dz_0} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial z_0 \partial x_0} v_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0} v_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial z_0^2} v_{0z}.$$

Аналогічно можна отримати залежності для решти похідних по часу, що входять в співвідношення (16). Залежності (20) суттєво спрощуються, якщо осі координат x_0, y_0, z_0

вибрати так, щоб напрямком швидкості v_0 співпадав с напрямком однієї з них. Наприклад, якщо $v_{0x} = v_0, v_{0y} = v_0, v_{0z} = v_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} v_0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0} v_0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial z_0 \partial x_0} v_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} v_0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial y_0} v_0, & & \\ & & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial z_0 \partial x_0} v_0, & & \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} v_0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial y_0} v_0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial x_0} v_0.$$

Отже, компоненти тензора швидкостей деформації для випадку плоскої деформації нестискаемого матеріалу ($D_0 = 1$), при умові, що $v_{0x} = v_0$ будуть дорівнювати

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= v_0 \left[\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0} \right], \\ \dot{\epsilon}_y &= v_0 \left[\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$2\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\gamma}_{xy} = v_0 \left[\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} - \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0} \right].$$

По аналогії з інтенсивністю деформацій інтенсивність швидкостей деформацій визначається формулою

$$\dot{\epsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \quad (23)$$

У випадку осесиметричної деформації

$$\dot{\epsilon}_u = \sqrt{\frac{4}{3}(\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_z)} + \frac{1}{3} \dot{\gamma}_{rz}^2 \quad (24)$$

В якості характеристики накопиченої пластичної деформації приймемо параметр Одквіста

$$e_u = \int_0^t \dot{\epsilon}_u d\tau. \quad (25)$$

Інтеграл (25) береться по шляху деформування і визначає довжину траєкторії в просторі деформацій.

В більшості випадків функції ейлерових координат від лагранжевих або функції (2), що входять в приведені вище співвідношення для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій, отримані шляхом апроксимації експериментальних даних. Після апроксимації експериментальної інформації тим чи іншим способом отримані функції використовуються в співвідношеннях (16), (18) або (22) для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій.

Висновки. Розроблено метод, використання якого дає можливість отримати основні рівняння компонент тензора швидкостей



деформацій при пластичній течії металу в процесах обробки тиском. Запропонований метод дозволяє підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану в процесах пластичного формозмінення, в тому числі процесах обробки тиском, що характеризуються немонотонною пластичною деформацією.

Список використаних джерел

1. Алієва Л. І., Алієв І. С., Грудкіна Н. С., Малій Х. В. Моделювання процесу комбінованого радіально-зворотного видавлювання деталей з фланцем. *Обработка материалов давлением*. Краматорськ. 2019. № 1 (48). С. 23-34.

2. Матвійчук В. А., Бубновська І. А. [Оцінка деформованості матеріалу криволінійних заготовок при холодному вальцюванні](#). *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. Вінниця. 2017. Випуск 4. С. 92-97.

3. Михалевич В. М., Добрянюк Ю. В., Краєвський В. О. [Порівняльне дослідження моделей граничних пластичних деформацій](#). *Вісник машинобудування та транспорту*. Вінниця. 2018. № 2. С. 56-64.

4. Грушко О. В., Огородніков В. А., Слободянюк Ю. О. [Деформовність маловуглецевого дроту в процесі його багатоступінчастого холодного волочіння](#). *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. Вінниця. 2019. №3. С. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Рекечинський В. І. Застосування методу функцій току в стаціонарних процесах пластичного деформування. *Вібрації в техніці і технологіях*. Вінниця. 2020. №2 (97). С. 157-163.

7. Сивак Р. І., Гунько І. В., Залізник Р. О. Застосування ліній току при визначенні кінематичних характеристик в стаціонарних процесах пластичної течії металу. *Вібрації в техніці і технологіях*. Вінниця. 2021. №2 (97). С. 157-163.

Список джерел у транслітерації

1. Alieva L. I., Aliev I. S., Grudkina N. S., Maliy H. V. Modeliuvannia protsesu kombinovanogo radialno-zvortnogo vydavliuvannia detaley z flantsem. *Obrabotka materialov davleniem*. Kramatorsk. 2019. № 1 (48). S. 23-34.

2. Matviychuk V. A., Bubnovska I. A. [Otsinka deformovanosti materialu kryvoliniynyh zagotovok pry holodnomu valtsuvanni](#). *Tehnika, energetyka, transport APK*. Vinnytsia. 2017. Vypusk 4. S. 92-97.

3. Myhalevych V. M., Dobraniuk Iu. V., Kraevskiy V. O. [Porivnialne doslidzhennia modeley granychnykh plastychnykh deformatsiy](#). *Visnyk mashynobuduvannia ta transportu*. Vinnytsia. 2018. № 2. S. 56-64.

4. Grushko O. V., Ogorodnikov V. A., Slobodianiuk Iu. O. [Deformovnist malovugletseвого drotu v protsesi yogo bagatostupinchastogo holodnogo volochinnia](#). *Visnyk Vinnytskogo politehnichnogo instytutu*. Vinnytsia. 2019. №3. S. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Rekechynskiy V. I. Zastosuvannia metody funktsiy toku v statsionarnykh protsessah plastychnogo deformuvannia. *Vibratsii v tehniitsi i tehnologiyah*. Vinnytsia. 2020. №2 (97). S. 157-163.

7. Syvak R. I., Gunko I. V., Zalizniak R. O. Zastosuvannia liniy toku pry vyznachenni kinematychnykh harakterystyk v statsionarnykh protsesah plastychnoy techiy metalu. *Vibratsii v tehniitsi i tehnologiyah*. Vinnytsia. 2021. №2 (97). S. 157-163.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

В механике сплошных сред нашли применение две эквивалентные друг другу точки зрения на течение металла в процессе деформирования – Эйлера и Лагранжа. Когда внимание концентрируют на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды в процессе деформирования – это сущность точки зрения Эйлера на исследуемое движение сплошной среды. С точки зрения Лагранжа движение считается известным, если скорость, ускорение, температура и другие величины заданы как функции координат точки пространства и времени. Сущность взгляда Лагранжа на изученное движение заключается в том, что концентрируют внимание на конкретной частице сплошной среды и исследуют историю ее деформирования и движения. Координаты, которые индивидуализируют точки сплошной среды и называются переменными Лагранжа. Взгляд Лагранжа на исследование движения сплошной среды лежит в основе физических законов, так как связан с движением отдельных частиц. В начальный момент координаты определенной точки по Эйлера и Лагранжу совпадают.

В статье рассматривается возможность применения смешанных координат



Эйлера и Лагранжа для определения компонента тензора скоростей деформаций в процессах пластического деформирования. Целесообразность подхода Лагранжа и Эйлера выясняется в конкретных задачах. При этом следует учитывать, что в координатах Эйлера уравнения равновесия имеют более простой вид (они линейные), а граничные условия – более сложный вследствие того, что невозможно, не решая задачи, определить компоненты перемещения, обычно входящие в граничные условия. В координатах Лагранжа краевые условия, как правило, записываются проще, а уравнение равновесия – сложнее.

При обработке металлов давлением металл испытывает значительные деформации. Однако каждый процесс удобно рассматривать в каждый фиксированный момент его протекания, поэтому необходимо знание основных положений и зависимостей, относящихся к малым деформациям.

Ключевые слова: переменные Лагранжа и Эйлера, деформации, тензор скоростей деформаций, пластическое течение, деформированное состояние, декартова система координат, частная производная.

STUDY OF THE KINEMATICS OF PLASTIC FLOW OF A METAL USING THE EULER AND LAGRANGE VARIABLES

In continuum mechanics, two equivalent points of view on the flow of a metal in the process of deformation - Euler and Lagrange - have found application. When attention is focused on a given point in space, where different particles of a continuous medium come in the process of deformation, this is the essence of Euler's point of view on the studied

motion of a continuous medium. From the point of view of Lagrange, the motion is considered known if the speed, acceleration, temperature and other quantities are given as functions of the coordinates of a point in space and time. The essence of Lagrange's view of the studied motion lies in the fact that they focus on a specific particle of a continuous medium and investigate the history of its deformation and motion. The coordinates that individualize the points of the continuous medium are called Lagrange variables. Lagrange's view on the study of the motion of a continuous medium underlies physical laws, since it is associated with the motion of individual particles. At the initial moment, the coordinates of a certain point according to Euler and Lagrange coincide.

The article discusses the possibility of using mixed Euler and Lagrange coordinates to determine the component of the strain rate tensor in plastic deformation processes. The expediency of the approach of Lagrange and Euler is clarified in specific problems. It should be borne in mind that in the Euler coordinates, the equilibrium equations have a simpler form (they are linear), and the boundary conditions are more complex due to the fact that it is impossible, without solving the problem, to determine the displacement components that are usually included in the boundary conditions. In Lagrange coordinates, the boundary conditions, as a rule, are written easier, and the equilibrium equation is more complicated.

When processing metals by pressure, the metal undergoes significant deformation. However, it is convenient to consider each process at each fixed moment of its course, therefore, it is necessary to know the basic provisions and dependencies related to small deformations.

Key words: Lagrange and Euler variables, deformations, strain rate tensor, plastic flow, deformed state, Cartesian coordinate system, partial derivative.

Відомості про авторів

Сивак Роман Іванович – доктор технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Залізник Роман Олександрович – аспірант (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Сивак Роман Іванович – доктор технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Зализник Роман Александрович – аспирант (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Sivak Roman – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines of Vinnytsia national agrarian university (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Zalizniak Roman – graduate student (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)