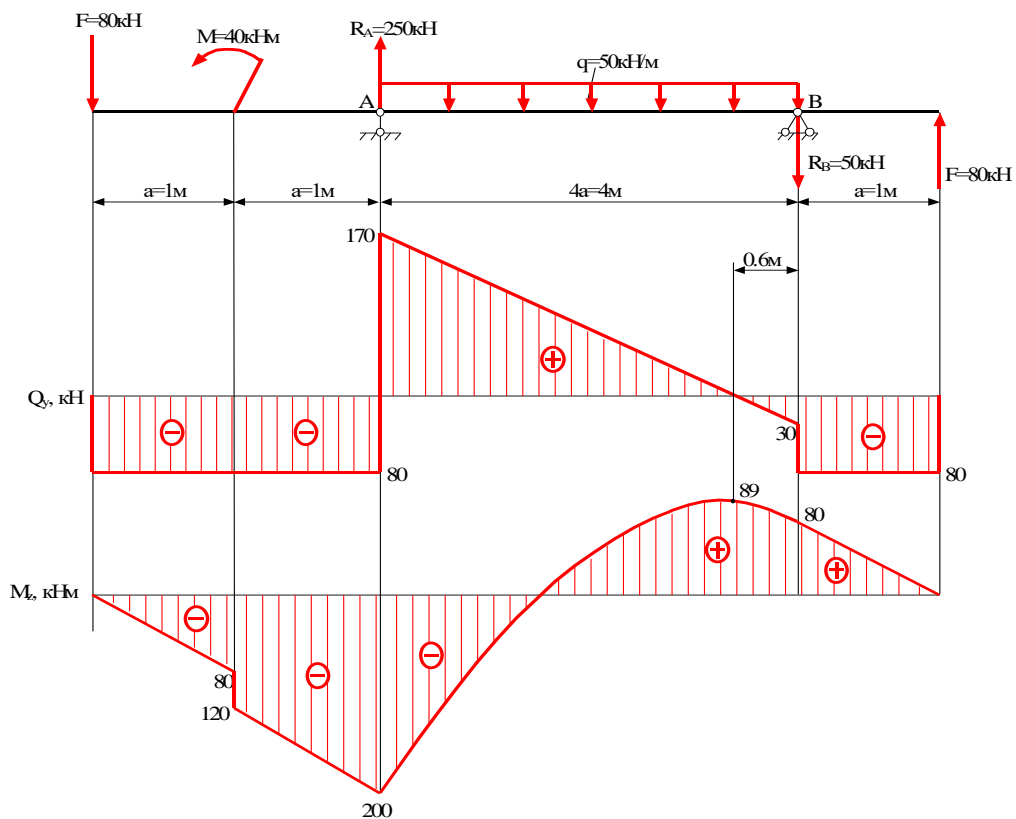


І. А. Деревенько, Р. І. Сивак

КОРОТКИЙ КУРС ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний аграрний університет

І. А. Деревенько, Р. І. Сивак

КОРОТКИЙ КУРС ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

ВНАУ 2020

УДК

ББК

Деревенько І.А., Сивак Р.І. Короткий курс опору матеріалів. – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 308 с.

Рекомендовано Вченою радою вінницького національного аграрного університету як навчальний посібник (Протокол № від 2020 р.)

Рецензенти:

Огородніков В.А. – д.т.н., професор (Вінницький національний технічний університет)

Грушко О.В. – д.т.н., професор (Вінницький національний технічний університет)

Анісімов В.Ф. – д.т.н., професор (Вінницький національний аграрний університет)

У навчальному посібнику розглянуто основні теми курсу опору матеріалів та в стислій формі приведені розв'язки типових задач. Значна увага приділена питанням побудови епюр внутрішніх силових факторів та методам розрахунків на міцність і жорсткість. В кожній задачі показаний порядок розрахунку, розв'язок виконаний в конкретних числових величинах, розрахунки супроводжуються необхідними схемами і рисунками. В посібнику приведені короткі теоретичні відомості та необхідні довідкові дані. Наведено запитання для самоконтролю якості засвоєння вивченого матеріалу даного курсу.

Для студентів освітнього ступеню бакалавр денної та заочної форми навчання спеціальності 133 - Галузеве машинобудування, які вивчають дисципліну «Опір матеріалів».

Зміст

ВСТУП	6
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОЛОЖЕННЯ	7
1.1. Наука про опір матеріалів. Об'єкти, що вивчаються	7
1.2. Зовнішні і внутрішні сили. Деформація	8
1.3. Основні гіпотези в опорі матеріалів	11
1.4. Метод перерізів. Поняття про епюри внутрішніх силових факторів	12
1.5. Епюри повздовжніх сил	16
1.6. Епюри крутних моментів	17
1.7. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів	18
Запитання для самоперевірки	20
2. РОЗТЯГ І СТИСК.	
МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ	21
2.1. Напруження і деформації при розтягу і стиску. Розрахунок на міцність і жорсткість	21
2.2. Нормальні напруження. Умова міцності	24
2.3. Поздовжні і поперечні деформації. Умови жорсткості	27
2.4. Діаграми розтягу і стиску матеріалів	31
2.5. Визначення твердості	40
2.6. Допустимі напруження	41
2.7. Умова міцності і жорсткості. Види розрахунків	43
Приклад	44
2.8. Статично невизначені стержневі системи при розтягу (стиску)	47
Приклад	48
Запитання для самоперевірки	53
3 ВИДИ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ МАТЕРІАЛУ	55
3.1. Напруження в точці	55
3.2. Закон парності дотичних напружень Головні площадки і головні напруження	56
3.3. Лінійний напружений стан	59
3.4. Плоский напружений стан	61
3.5. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці	64
3.6. Деформації при об'ємному напруженому стані Узагальнений закон Гука	67
3.7. Потенційна енергія деформації	71
3.8. Питома потенційна енергія формо змінення	73
Запитання для самоперевірки	75
4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ	76
4.1. Напружений стан в точці	76
4.2. Диференціальні рівняння рівноваги	80

4.3. Розкладання тензора напружень	82
4.4. Головні площадки і головні напруження	85
4.5. Інтенсивність напружень	88
4.6. Геометричне зображення напруженого стану	95
4.7. Деформований стан в точці тіла	98
4.8. Умови сумісності деформацій	100
4.9. Розкладення тензора деформацій	101
4.10. Головні вісі і головні деформації	103
4.11. Інтенсивність деформацій	105
4.12. Геометричне зображення деформованого стану	107
4.13. Прирошення деформацій	109
4.14. Швидкості деформацій	112
Запитання для самоперевірки	114
5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	115
5.1. Статичні моменти площі. Центр ваги площі	115
5.2. Моменти інерції плоских фігур	117
5.3. Моменти інерції відносно паралельних осей	119
5.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей	121
5.5. Поняття про радіус інерції	127
Приклад	128
Запитання для самоперевірки	131
6. КРУЧЕННЯ	132
6.1. Основні поняття	132
6.2. Напруження при крученні	133
Приклад	135
Запитання для самоперевірки	138
7. ЗГИН	139
7.1. Основні поняття.	139
7.2. Типи опор балок. Типи балок	140
7.3. Визначення опорних реакцій в балках	143
7.4. Внутрішні силові фактори при згині	144
7.5. Диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечним зусиллям і згинаючим моментом	148
7.6. Епюри поперечних зусиль і згинаючих моментів	149
Приклад	153
7.7. Нормальні напруження при прямому чистому згині	168
7.8. Розрахунок на міцність при згині	177
Приклад	179
Запитання для самоперевірки	184
8. ПОЗАЦЕНТРОВИЙ РОЗТЯГ (СТИСК)СТЕРЖНЯ ВИСОКОЇ ЖОРСТКОСТІ	185
8.1. Основні поняття	185
Приклад	188

Запитання для самоперевірки	195
9. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ (ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ)	196
9.1. Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)	196
9.2. Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)	198
9.3. Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)	199
9.4. Критерій питомої потенційної енергії формозмінення (четверта теорія міцності)	199
9.5. Критерій Мора	200
Запитання для самоперевірки	203
10. ЗСУВ	204
10.1. Поняття про зсув	204
10.2. Дотичні напруження. Умови міцності	205
10.3. Чистий зсув	206
10.4. Закон Гука при чистому зсуві	208
Запитання для самоперевірки	210
11. ЗГИН З КРУЧЕННЯМ	211
11.1. Основні поняття	211
Приклад	212
Запитання для самоперевірки	217
12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ	218
12.1. Метод Мора	218
12.2. Метод Верещагіна	219
Приклад	221
Запитання для самоперевірки	227
13. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ	228
13.1. Основні поняття	228
Приклад	229
Запитання для самоперевірки	237
14. РОЗРАХУНОК СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ	238
14.1. Основні поняття	238
Приклад	242
Запитання для самоперевірки	250
15. НАБЛИЖЕНИЙ РОЗРАХУНОК НА УДАР	251
15.1. Основні поняття	251
Приклад	251
Запитання для самоперевірки	258
Додатки	259
Список літератури	306

ВСТУП

Опір матеріалів розглядає тіла, які під впливом зовнішнього навантаження змінюють свої форму та розміри, тобто деформуються. Деформації бувають пружними та пластичними. В залежності від того, які зовнішні сили діють на тіло, останнє деформується по-різному, як кажуть, тіло знаходиться в різному напруженому стані. Основними видами напруженого стану є: стиск, розтяг, згин, зсув, кручення. У природі абсолютно пружних тіл не існує, тому якщо розглядати незначні деформації, то тіло можливо вважати пружним. Про такі деформації, а точніше про деформації, які діють в межах закону Гука, і буде в подальшому йти мова. Основним завданням опору матеріалів є забезпечення надійних розмірів поперечного перерізу деталі, на яку діють зовнішні навантаження. Такі розміри визначаються із розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елемента конструкції. При розрахунку на міцність розміри поперечного перерізу деталі визначаються із умов, що при дії зовнішнього навантаження виключена можливість руйнації. При розрахунку на жорсткість також визначаються розміри поперечного перерізу деталі, але із умов, що при дії зовнішнього навантаження деформація тіла не перевищить допустимих значень. Розрахунком на стійкість визначається критичне значення сили, при якій можливий перехід конструкції із одного рівноважного, розрахункового стану в інший, не бажаний стан. Із всіх розрахунків основним є розрахунок на міцність. Руйнація зразка відбувається за рахунок найбільших значень нормальних та дотичних напружень або їх комбінацій. Тому ці величини обмежені допустимими значеннями: $[\sigma]$ – нормальним та $[\tau]$ – дотичним напруженнями.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Наука про опір матеріалів. Об'єкти, що вивчаються

Опір матеріалів це наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під *міцністю* розуміють здатність конструкції, її частин і деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Під *жорсткістю* розуміють здатність конструкції і її елементів протидіяти деформації, яка викликана зовнішнім навантаженням.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

При всій різноманітності видів конструктивних елементів, що зустрічаються у спорудах і машинах, їх можна звести до порівняно невеликого числа основних форм. Тіла, які мають ці основні форми, і є *об'єктами розрахунку* на міцність, жорсткість і стійкість. До них відносяться стержні, оболонки, пластини і масивні тіла.

Стержнем або *брусом* називається тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри (рис. 1.1).

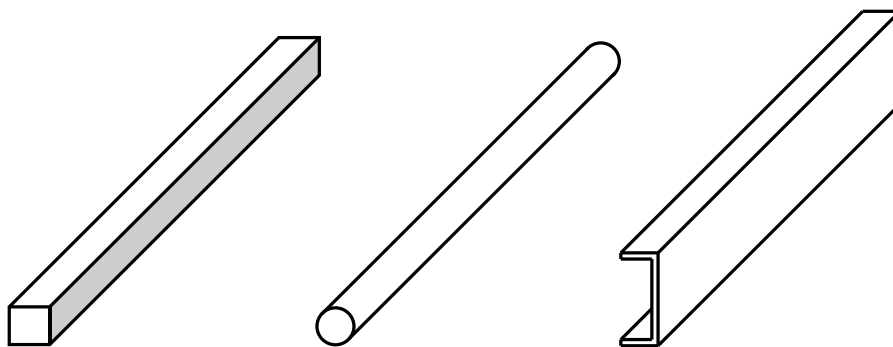


Рисунок 1.1 – Брус

Оболонка це тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної (рис. 1.2). Поверхня, яка ділить товщину оболонки на рівні частини, називається *серединною*.

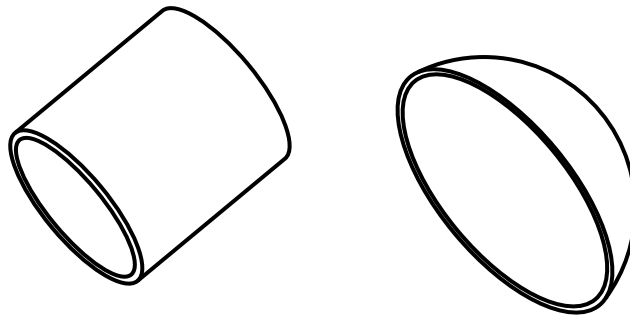


Рисунок 1.2 – Оболонка

Якщо серединна поверхня є площиною, то розрахунковий об'єкт називають *пластиною* (рис. 1.3).

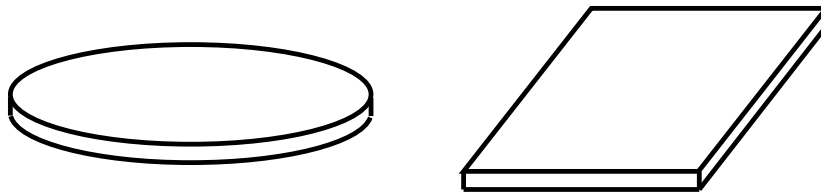


Рисунок 1.3 – Пластина

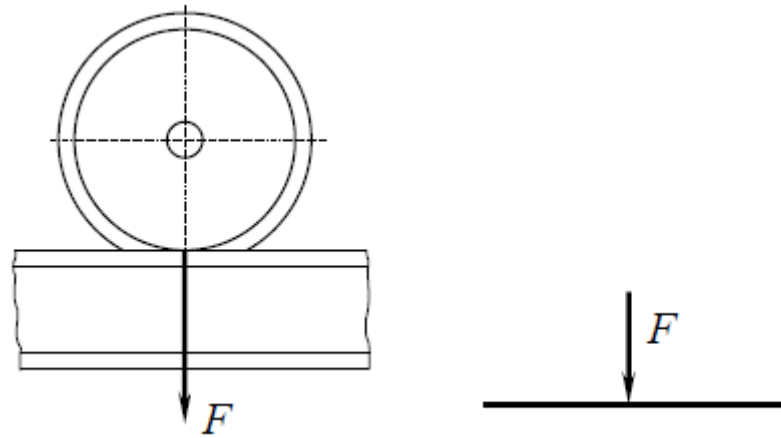
Тіла, у яких всі три розміри одного порядку, називають *масивними тілами*. До них відносяться фундаменти споруд, підпірні стінки тощо.

1.2. Зовнішні і внутрішні сили. Деформація

Сили, що діють на елемент конструкції з боку інших тіл, стосовно елемента є зовнішніми. Зовнішні сили називаються навантаженнями. Вони прикладені до деяких ділянок поверхні елемента або розподілені по об'єму. До об'ємних сил відносять вагу елемента, сили інерції, електромагнітні сили. До поверхневих відносять, наприклад, силу атмосферного тиску, сили тиску сипучих вантажів, силу тиску колеса на рейку і т.д.

Навантаження діляться на зосереджені і розподілені. Зосереджене навантаження діє по малій в порівнянні з розмірами деталі площі й умовно

приймається прикладеним у точці (рис.1.4). Зосереджене навантаження будемо позначати буквою F , його розмірність Н і кН.



a – конструктивна схема; b – розрахункова схема

Рисунок 1.4 – Зосереджене навантаження

Розподілене навантаження - це навантаження, прикладене до ділянки тіла великої площі або обсягу, і при упорядкуванні розрахункової схеми його не можна замінити зосередженим. Звичайно розподілене навантаження приводять до навантаження, що припадає на одиницю довжини тіла. Позначається розподілене навантаження літерою q , його розмірність Н/м, або кН/м (рис. 1.5).

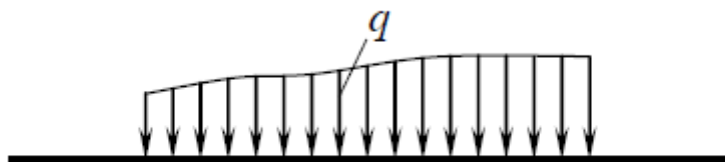


Рисунок 5 – Розподілене навантаження

В залежності від характеру прикладання сил в часі розрізняють навантаження статичні і динамічні. Навантаження вважається *статичним*,

якщо воно порівняно повільно і плавно зростає від нуля до свого кінцевого значення, а потім стає незмінним. Статичні навантаження не змінюють свою величину, положення на тілі протягом значного часу і не викликають значних його прискорень. Силами інерції при статичному навантаженні можна знехтувати.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так взаємодіючих з ним тіл. Динамічні навантаження змінюють величину і положення на тілі з часом, а тому викликають значні прискорення тіла. Виникаючими при цьому силами інерції знехтувати не можна. Динамічні навантаження діляться на миттєво прикладені, ударні і повторно-перемінні.

Навантаження вважається *миттєво прикладеним*, якщо воно зростає від нуля до свого кінцевого значення на протязі дуже короткого проміжку часу.

Для ударного навантаження характерно те, що в момент його прикладання тіло, що викликає навантаження, володіє певною кінетичною енергією.

Багато деталей машин зазнають дії навантажень, безперервно і періодично змінних в часі. Такі навантаження називаються *повторно-змінними*. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталі, що циклічно повторюються.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між частинами твердого тіла. Зовнішні сили викликають деформації тіл, що призводить до виникнення вже внутрішніх сил.

Під деформаціями розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла.

Деформації можуть бути абсолютні та відносні (коли їх вимірюють відношенням зміни величини до її початкового значення).

У більшості випадків деформація тіла складається з двох частин: пружної та пластичної (залишкової).

Пружні – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла. Пластичні – такі, що залишаються після розвантаження.

За нормальної експлуатації інженерних конструкцій не допускаються пластичні деформації, коли розміри і форми елементів конструкцій незворотно змінюються.

Визначення умов виникнення та зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження тих навантажень, які безпечно можуть передаватися на конструкцію.

1.3. Основні гіпотези в опорі матеріалів

Для побудови теорії опору матеріалів приймають певні гіпотези відносно структури і властивостей матеріалів, а також про характер деформацій. Ці гіпотези наступні:

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу.* Передбачається, що матеріал повністю заповнює форму тіла. Атомістична теорія дискретної побудови речовини до уваги не приймається.

2. *Гіпотеза про однорідність і ізотропність.* Матеріал передбачається однорідним і ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі і в будь-якому напрямку властивості матеріалу вважаються однаковими. Хоча кристали, із яких складаються метали, анізотропні, але їх хаотичне розташування дає можливість вважати макрооб'єми металів ізотропними. В окремих випадках припущення про ізотропію некоректне. Наприклад, до анізотропних матеріалів відноситься деревина, властивості якої вздовж і поперек волокон суттєво відмінні, армовані матеріали тощо.

3. *Гіпотеза про малість деформацій.* Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла.

4. *Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.* Всі тіла передбачаються абсолютно пружними. Більшість задач опору матеріалів розв'язують в припущенні лінійно деформованого тіла, тобто такого, при якому справедливий закон Гука, що виражає пряму пропорційність між деформаціями і навантаженнями.

Перераховані вище гіпотези дозволяють розв'язувати широке коло задач по розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість. Результати розрахунків добре узгоджуються з практичним даними.

1.4. Метод перерізів. Поняття про епюри внутрішніх силових факторів

Зовнішніми називаються сили, що впливають з боку тіл, які не входять до даної системи. Зовнішні сили розподіляються на об'ємні і поверхневі.

Об'ємні сили розподілені за об'ємом тіла і прикладені до кожної його частинки (сила ваги, сила магнітного тяжіння).

Поверхневі сили прикладені до ділянок поверхні і характеризують безпосередню контактну взаємодію даного об'єкта з навколишніми тілами. До зовнішніх сил включаються і реакції зв'язків, що доповнюють систему сил до рівнодіючої.

Нехай стержень навантажений будь-якою, але взаємно урівноваженою системою сил P_1, P_2, P_n (рис. 1.6).

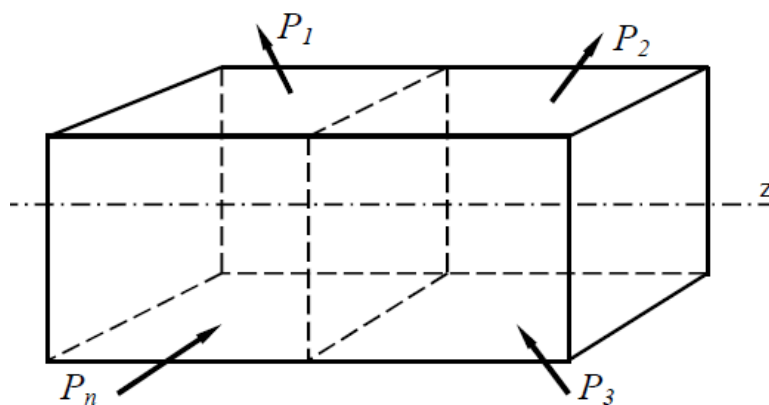


Рисунок 1.6 – Стержень, навантажений системою сил

При збільшенні цих сил може настати момент, коли стержень руйнуватиметься або його деформація стане дуже великою.

Ці процеси можуть відбуватися тому, що в окремих місцях усередині стержня виникають зусилля, величини яких досягають величин сил міжмолекулярного зчеплення. Отже, безпосередньою причиною руйнування є ті внутрішні зусилля, які виникають в стержні при дії заданих навантажень.

Величини внутрішніх зусиль визначаються методом перерізів, який називають також методом *РВЗВ* (за першими літерами слів).

Суть його полягає в наступному:

- *Розсікаємо* (подумки) стержень за перерізом *A*, в якому слід визначити величину внутрішніх зусиль (рис.1.7). Зазвичай стержень розсікають площиною перпендикулярною до осі стержня.

- *Відкидаємо* яку-небудь частину стержня (зазвичай ту, до якої прикладено більше сил).

- *Заміняємо* сили, що діють на частину, яка залишилася, головним вектором *R* і головним моментом *M*.

- *Врівноважуємо* частину, що залишилася, оскільки до розрізу стержня вона знаходилася в рівновазі.

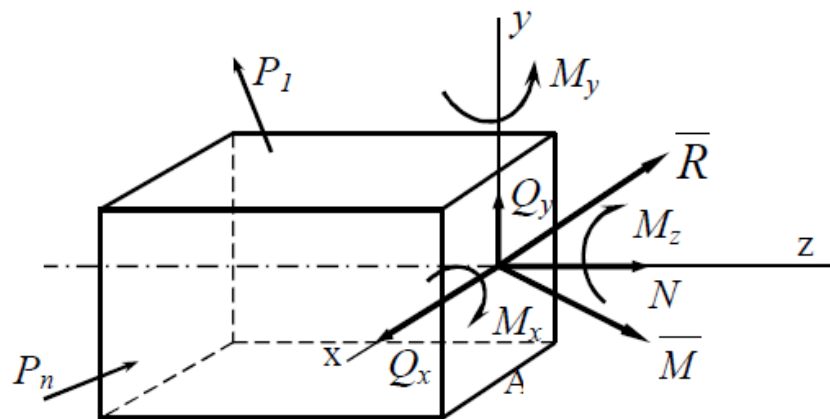


Рисунок 1.7 – Стержень, розсічений за перерізом *A*

Спроектуювши головний вектор і головний момент внутрішніх сил на осі *x*, *y*, *z*, одержимо шість внутрішніх силових факторів (див. рис.1.7): три сили (*N*, *Q_x*, *Q_y*) і три моменти (*M_x*, *M_y*, *M_z*).

Ці величини називають внутрішніми зусиллями в перерізі стрижня, для яких прийняті наступні назви:

N – подовжня сила;

Q_x, Q_y – поперечні сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;

M_z – крутний момент (іноді позначають $M_{кр}$).

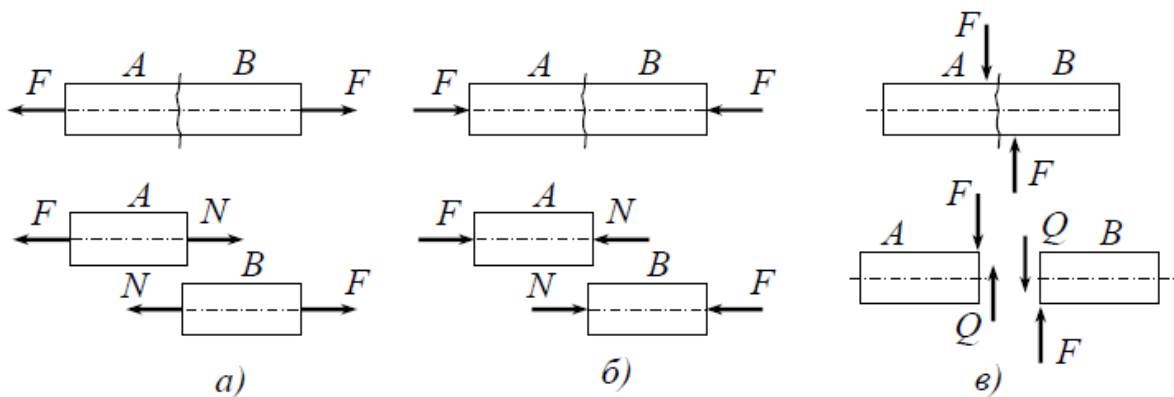
Цим чотирьом видам внутрішніх зусиль відповідають чотири види деформації стержня:

1. Розтягування (або стискання), при якому в поперечних перерізах виникає тільки подовжня сила N (рис. 1.8 а,б).

2. Зсув, при якому в поперечних перерізах виникає тільки поперечна Q_x (або Q_y) (рис. 1.8 в).

3. Згинання, при якому в поперечних перерізах виникає тільки M_x або M_y (чисте згинання) (рис. 1.8 д). Якщо в поперечних перерізах виникає і поперечна сила Q , то такий вид згинання називається поперечним.

4. Кручення, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент M_z : $M_z = M_{кр}$. (рис. 1.8 г).



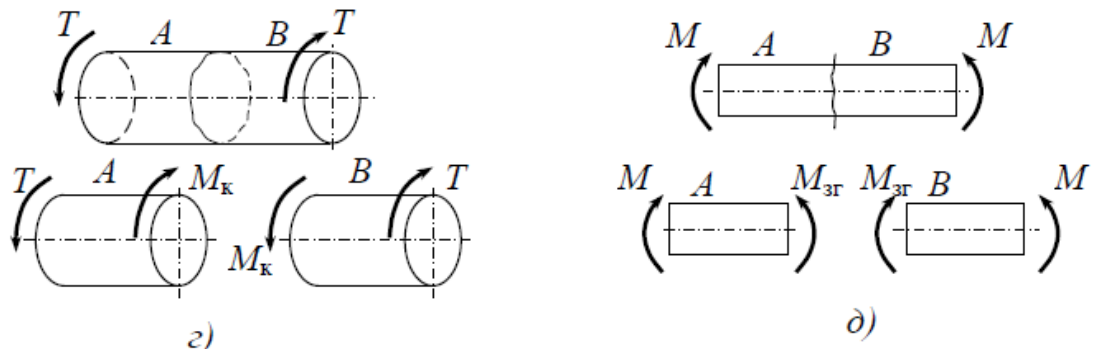


Рисунок 1.8 – Види деформації стержня:

Графік, що характеризує зміну внутрішнього силового фактора в разі переходу від одного перерізу бруса до іншого, називається епюрою.

Для кожного внутрішнього силового фактора будується своя окрема епюра.

Під час побудови епюр внутрішніх силових факторів користуються такими правилами.

1. Вісь абсцис, на якій будують епюру (її називають базовою лінією епюри) проводять паралельно осі бруса за межами розрахункової схеми.
2. Від базової лінії епюри відкладають ординати, що зображають у вибраному масштабі величину зусилля, з урахуванням його знака (додатні значення угорі чи праворуч, від'ємні – вниз або ліворуч).
3. Штрихують епюри лініями, перпендикулярними до базової.
4. На полях епюр проставляють знак, обведений колом, а навпроти базової лінії вказують позначення і одиницю зусилля.

Крім цього, на межах ділянок епюр проставляють числові значення внутрішнього силового фактора.

Найнебезпечнішими є ті перерізи (або ділянки) бруса, в яких внутрішні силові фактори досягають найбільшого значення. Небезпечні ділянки або перерізи бруса можна визначити лише після побудови епюри зусилля. В зв'язку

з цим вміння правильно будувати епюри внутрішніх сил вважається одним із найважливіших завдань предмета опору матеріалів.

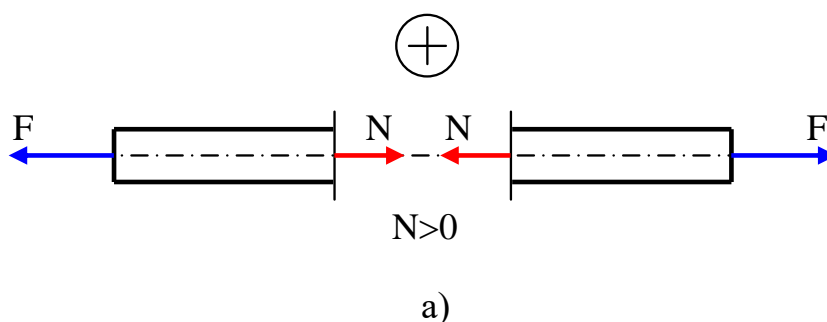
1.5. Епюри повздовжніх сил

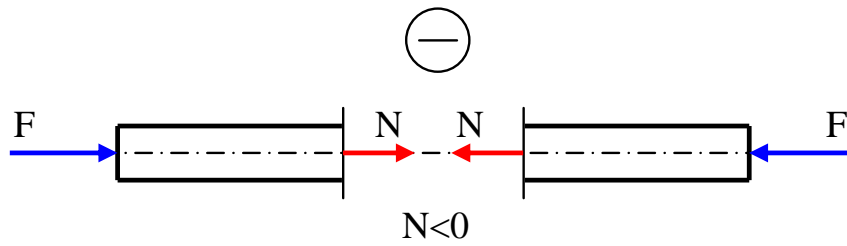
Повздовжня сила N в перерізі чисельно дорівнює сумі алгебри проекцій усіх сил, прикладених по одну сторону від даного перерізу, на повздовжню вісь стержня.

Для епюр повздовжніх сил характерні певні закономірності, знання яких дозволяє оцінити правильність виконаних побудов:

1. Епюри N завжди прямолінійні.
2. На ділянці, де немає розподіленого навантаження, епюра N - пряма, паралельна осі; а на ділянці під розподіленим навантаженням - пряма похилої.
3. Під точкою прикладення зовнішньої зосередженої сили на епюрі обов'язково має бути стрибок (розрив першого роду) на величину цієї сили.
4. Додатні значення відкладаються (у вибраному масштабі) над віссю епюри, від'ємні - під віссю.

Правило знаків при побудові епюр повздовжніх (осьових) сил: повздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона викликає розтяг, і від'ємною, якщо викликає стиск (рис. 1.9 а, б).





б)

Рисунок 1.9 – Правило знаків при побудові епюр повздовжніх сил

1.6. Епюри крутних моментів

Деформація кручення найбільш розповсюджена в валах. Якщо навантаження на прямолінійний стержень (вал) складається тільки з моментів $M_{кр}$, площини яких перпендикулярні до осі стержня, то з шести зусиль і моментів в будь-якому перерізі залишається тільки крутний момент M_x .

Внутрішній момент M_x виражається через зовнішні $M_{кр}$: M_x в перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів $M_{кр}$, розташованих по одну сторону від перерізу. Якщо стержень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх $M_{кр}$ дорівнює нулю. Тому результат буде отримано один і той же, у випадку якщо будемо при розрахунку M_x брати суму моментів $M_{кр}$, розташованих зліва або справа від перерізу.

Правило знаків при побудові епюр крутних моментів M_x : *крутний момент M_x вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі частини, яка розглядається, він намагається обернути переріз за годинниковою стрілкою* (рис. 1.10 а, б).

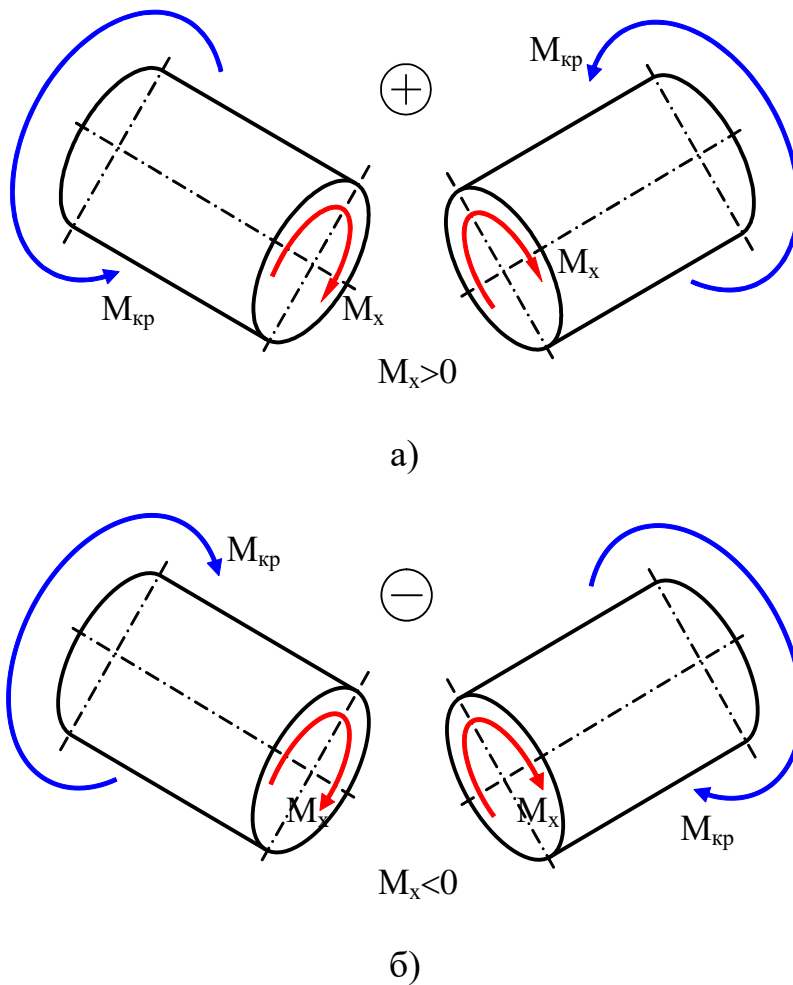


Рисунок 1.10 – Правило знаків при побудові епюр крутних моментів

1.7. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів

Поперечна сила і згинаючий момент, будучи функціями від абсциси x , змінюються по довжині балки. Для визначення найбільш небезпечних перерізів балки зміну поперечної сили і згинаючого моменту по довжині балки зручно зображувати графічно. Такі графіки мають назву епюр поперечних сил і згинаючих моментів.

Встановимо наступні правила знаків для поперечної сили Q і згинаючого моменту M :

Поперечна сила Q в перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою (рис. 1.11 а, б);

Згинаючий момент M в перерізі додатний, якщо він викликає стиск у верхніх волокнах (рис. 1.12, 1.13 а, б).

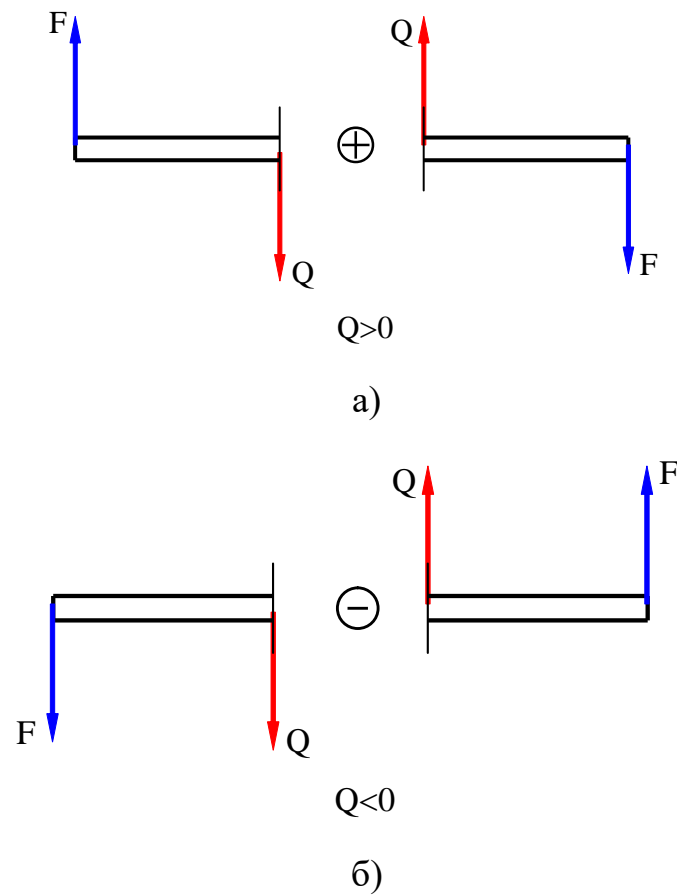


Рисунок 1.11 – Правила знаків для поперечної сили

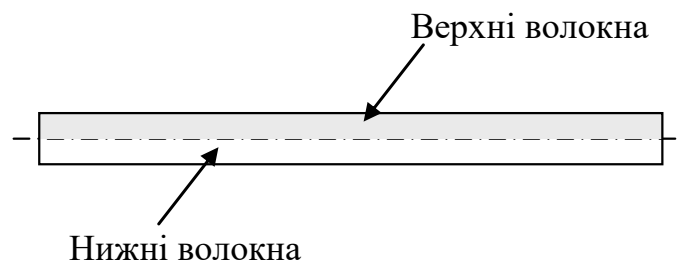
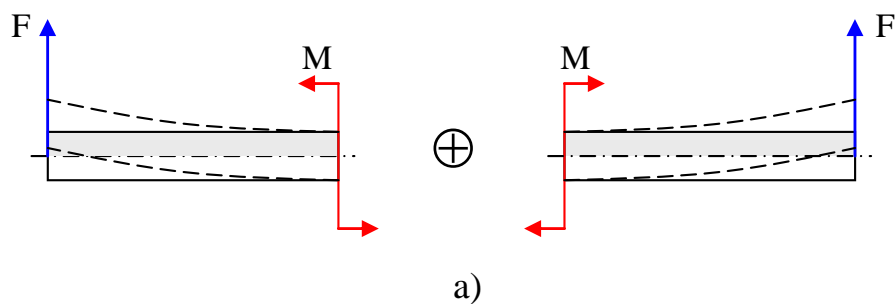


Рисунок 1.12 – Розташування волокон в стержні



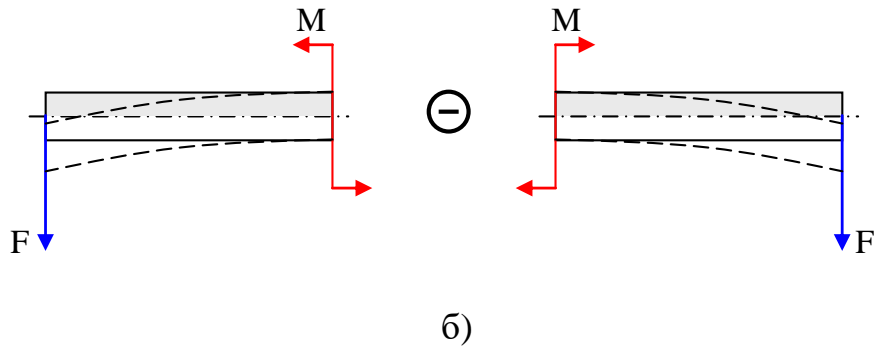


Рисунок 1.13 – Правила знаків для згинаючого моменту

Для практичних розрахунків рекомендується наступне:

Якщо зовнішня сила намагається повернути балку відносно перерізу, що розглядається, за годинниковою стрілкою, то у виразі для Q в цьому перерізі вона додатна (рис. 1.11).

Якщо зовнішнє навантаження створює відносно перерізу, що розглядається, момент, який викликає стиск верхніх волокон балки, то у виразі для M в цьому перерізі він додатний (рис. 1.13).

Запитання для самоперевірки

1. Визначити основні завдання курсу опору матеріалів.
2. Що розуміють під міцністю, жорсткістю і стійкістю матеріалів?
3. Як в опорі матеріалів класифікуються зовнішні сили?
4. Які гіпотези використовують в опорі матеріалів?
5. Призначення і сутність метода перерізів.
6. Побудова епюр.
7. Правило знаків при побудові епюр поздовжніх сил, крутних моментів, поперечних сил, згинаючих моментів.

2. РОЗТЯГ І СТИСК. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

2.1. Напруження і деформації при розтягу і стиску. Розрахунок на міцність і жорсткість

Розтяг або стиск стержня викликається силами, що діють вздовж його осі. В цьому випадку в поперечних перерізах стержня із шести внутрішніх силових факторів виникає тільки один – повздовжня (осьова) сила N . Під розтягом (стиском) розуміють такий вид навантаження стержня, при якому в його поперечних перерізах виникають нормальні сили. Вважається, що нормальна сила прикладена в центрі ваги і направлена по нормалі до цього перерізу.

Передача зусиль до бруса (стержня) може бути здійснена різними способами, як показано на розрахунковій схемі (рис. 2.1).

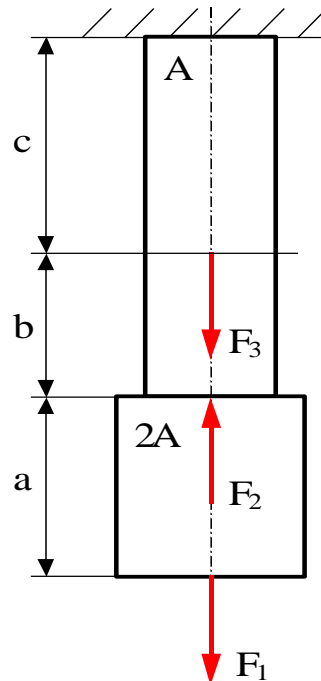


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема

Точки прикладення сил F_i ($i=1,2,3\dots$) і лінії їх дії співпадають з віссю, яка розташована по лінії центрів ваги поперечних перерізів бруса.

При розтягу і стиску розглядаються прямолінійні стержні довільної форми поперечного перерізу A , виконані з різних матеріалів (γ - питома вага матеріалів стержнів). Власна вага стержня обмежених розмірів виявляється набагато менше величини сил F_i , які можуть бути прикладені до стержнів з умови міцності матеріалів стержнів.

Нормальні сили в поперечних перерізах визначаються методом перерізів. Кожний переріз ділить стержень на дві частини. На частині, яка розглядається, додатна (розтягуюча) сила зображується від перерізу, від'ємна (стискаюча) сила – до перерізу. Дійсний напрямок нормальної сили по відношенню до перерізу встановлюється при розгляді рівноваги одної частини стержня. Для цього достатньо скласти рівняння рівноваги

$$\sum F(x)=0$$

де x – геометрична вісь центрів ваги поперечних перерізів стержня.

Якщо в розтягнутому або стиснутому стержні його вага не враховується, то нормальні сили визначаються через задані зовнішні сили F_i .

При врахуванні власної ваги стержня нормальна сила N є функцією довжини ділянки, яка розглядається. В межах цієї ділянки поперечний переріз A може бути або постійним по величині або змінюватися по закону, який залежить від форми поперечного перерізу стержня.

В залежності від форми перерізу A вага відсіченої частини стержня може підраховуватися або в об'ємі прямокутного циліндра, квадрата і т. і. або в об'ємі піраміди, усіченого конуса і т. і.

Рівнодіюча внутрішніх сил, підрахована з врахуванням власної ваги, також прикладається в центрі ваги поперечного перерізу A .

Прийнято припущення, що в кожній точці поперечного перерізу внутрішні сили розподіляються рівномірно (принцип Сен-Венана). Ці сили, які

приходяться на одиницю площі поперечного перерізу, в подальшому будемо називати нормальними напруженнями σ . Нормальні напруження в поперечних перерізах розтягнутого (стиснутого) стержня визначаються по формулі

$$\sigma = \pm \frac{N}{A}, \quad (2.1))$$

де N – нормальна сила,

A – площа поперечного перерізу.

Нормальним напруженням σ в перерізах стержня приписуються знаки нормальних сил N в тих же перерізах.

Кожний поперечний переріз під дією нормальної сили N може переміщатися (паралельно зміщуватися відносно других поперечних перерізів) на деяку величину Δl (мм, см). Величина Δl , яка підрахована в стержнях, які виконані з машинобудівних матеріалів, мала порівняно з заданими розмірами стержнів, а тому при складанні рівнянь рівноваги в перерізах стержнів величиною Δl нехтують (принцип незмінності початкових розмірів).

Переріз, розташований в защемленні, не зміщується, а будь-який фіксований переріз (наприклад переріз I-I) по довжині стержня отримує по відношенню до защемлення переміщення

$$\Delta l_{I-I} = \int_{l_1} \frac{N dx}{EA}, \quad (2.2)$$

де l_1 – відстань від перерізу I-I, який розглядається, до защемлення,

EA – жорсткість матеріалу стержня в межах довжини l_1 ($l_1 \leq l$, l – довжина стержня),

E – модуль пружності матеріалу стержня.

В межах довжини l_1 стержень може мати різну величину площ A (поступова або різка, ступінчаста зміна площі), а також може бути

виготовлений з різних матеріалів (різні величини модуля пружності E та питомої ваги γ).

Тоді вказаний вище інтеграл для підрахунку величини Δl_{I-I} потрібно розкривати по частинам.

Якщо в підсумку отримаємо відповідь $\Delta l_{I-I} > 0$, то це значить, що переріз I-I віддалився від защемлення (стержень на довжині l_I отримав позитивне видовження). При $\Delta l_{I-I} < 0$ стержень на довжині l_I отримав деяке вкорочення (переріз I-I приблизився до защемлення відносно свого початкового положення).

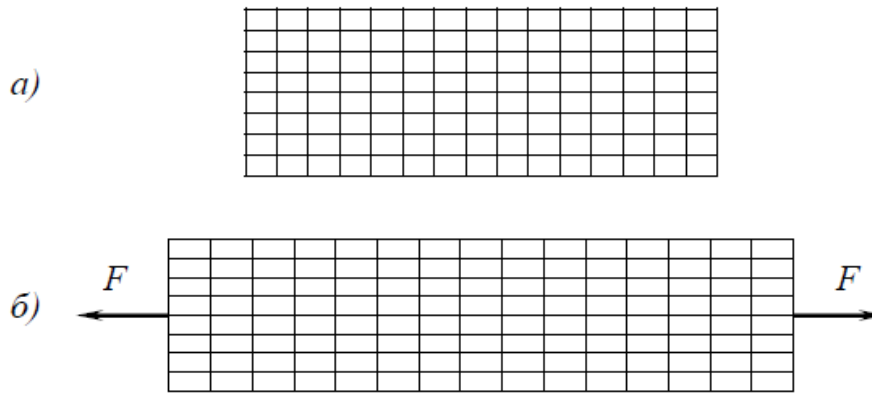
В підсумку короткої теоретичної довідки відмітимо, що величини нормальних сил, нормальних напружень і переміщень поперечних перерізів стержнів від дії сил F_i і власної ваги визначаються відповідно принципу незалежності дії сил, згідно якого дія кожної сили на стержень враховується окремо, а дія всіх сил алгебраїчно сумується.

2.2. Нормальні напруження. Умова міцності

Повздовжнє зусилля N – це рівнодіюча елементарних нормальних сил σdA , що діють у поперечному перерізі стержня.

Для визначення нормальних напружень σ по відомому значенню повздовжнього зусилля N необхідно знати закон їхнього розподілення по перерізу. Це статично невизначувана задача. Вона вирішується з урахуванням деформації стержня і закону Гука.

Розглянемо розтяг стержня (виготовленого, наприклад, для більшої наочності, із гуми) на поверхні якого нанесена прямокутна сітка повздовжніх і поперечних ліній (рис. 2.2).



a – до розтягу; *б* – після розтягу

Рисунок 2.2 – Деформація стержня при розтягу

При дії навантаження поздовжні і поперечні лінії не скривлюються і залишаються взаємно перпендикулярними. Змінюються лише відстані між ними: між поперечними лініями збільшуються, а поздовжніми - зменшуються. Якщо припустити, що усередині стержня деформації мають той же характер, що і на поверхні, то аналізований досвід є підтвердженням гіпотези плоских перерізів.

Усі поперечні перерізи переміщуються паралельно і деформація стержня у всіх точках поперечного перерізу однакова. За законом Гука в них діють однакові нормальні напруження $\sigma = const$.

Фактичний розподіл напружень у перерізах стержня, що примикають до місця прикладення зовнішніх сил, залежить від засобу їхнього прикладення і може бути нерівномірним. Проте в міру видалення поперечних перерізів від місця прикладення зовнішніх сил, деформації й епюри напружень вирівнюються і на відстані, приблизно рівній найбільшому з поперечних розмірів стержня, розподіл напружень можна відповідно до принципу Сен-Венана вважати практично рівномірним. Застосування принципу Сен-Венана дозволяє не враховувати конкретні засоби прикладення зовнішніх сил.

Так, на рисунку 2.3 один і той же стержень, закріплений верхнім кінцем, навантажується на вільному кінці статично еквівалентними навантаженнями, рівнодіючі котрих виражаються величиною вектора F . Навантаження прикладені різними способами: а) у виді зосередженої осьової сили; б) у виді двох сил; в) у виді розподіленого навантаження. Дослідження показують, що в усіх випадках в поперечному перерізі, віддаленому на відстань, що перевищує у 1,5–2 рази його поперечні розміри, напруження практично однакові.

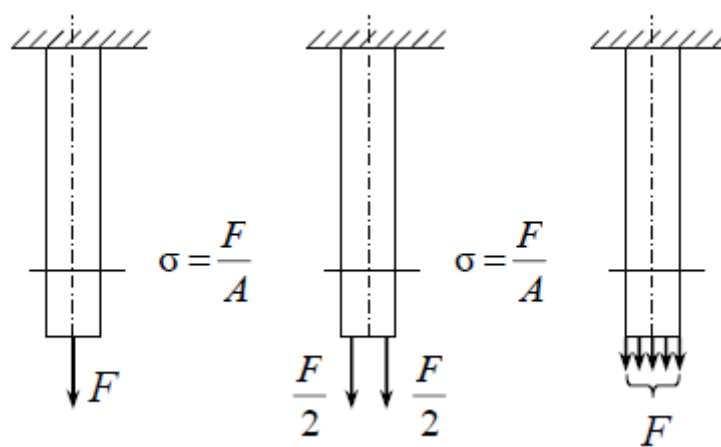


Рисунок 2.3 – Пояснення принципу Сен-Венана

Для забезпечення міцності стержня фактичні напруження в поперечних перерізах стержня не повинні перевищувати допустимих значень, тобто

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.1)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження матеріалу бруса на розтяг (стиск).

Залежність (2.1) являє собою умову міцності при розтягу (стиску).

З умови (2.1) крім перевірки міцності можна визначити:

- площу поперечного перерізу бруса (необхідно при проектному розрахунку)

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.2)$$

- припустимо силу при заданих розмірах поперечного перерізу

$$[N] = [\sigma]A. \quad (2.3)$$

2.3. Подовжні і поперечні деформації. Умови жорсткості

При розтягу довжина стержня збільшується, а поперечні розміри скорочуються, при стиску навпаки, довжина зменшується, а поперечні розміри збільшуються.

На рисунку 2.4 приведений розтягнутий стержень. Його деформований вид показаний штриховою лінією.

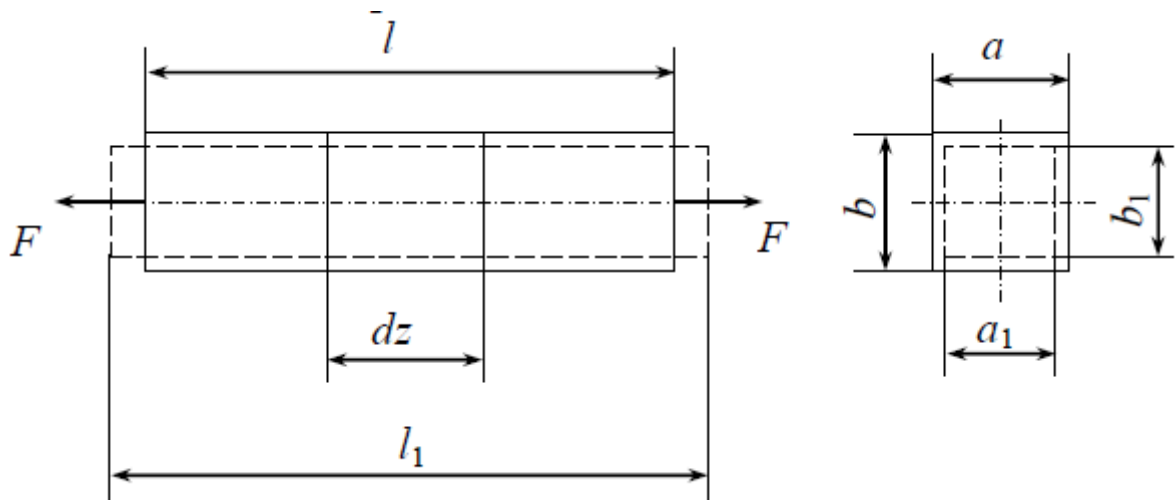


Рисунок 2.4 – Деформації розтягнутого стержня

Зміна довжини стержня $\Delta l = l_1 - l$ називається його абсолютним подовженням.

Вирізаємо уявно нескінченно малий елемент бруса довжиною dz . Після прикладення навантаження він подовжується на величину Δdz . Подовжня відносна й абсолютна деформація елемента

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}; \quad \Delta dz = \varepsilon dz.$$

В усіх точках бруса виникає один і той же напружений стан, отже, для всіх його точок $\varepsilon = \text{const}$. Абсолютне подовження бруса

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \varepsilon \int_0^l dz = \varepsilon l.$$

Звідки відносна подовжня деформація

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.4)$$

Між напруженнями і деформаціями існує залежність, відома за назвою закону Гука. Для розтягу (стиску) вона має вигляд

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.5)$$

де E - модуль пружності першого роду (модуль Юнга).

Модуль пружності першого роду характеризує жорсткість матеріалу. Для сталі, наприклад, $E = (2...2,1) \cdot 10^5$ МПа.

Підставивши в залежність (2.5) значення нормального напруження і відносної деформації отримаємо

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Звідки абсолютна поздовжня деформація бруса

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.6)$$

Добуток EA називається жорсткістю поперечного перерізу бруса при розтягу (стиску).

Залежність справедлива для ділянки бруса постійного поперечного перерізу A , у перерізах якого діє постійне поздовжнє зусилля N .

Якщо на ділянці поздовжнє зусилля $N(z)$ і площа поперечного перерізу $A(z)$ змінні, тоді абсолютне подовження ділянки довжиною l визначається за формулою

$$\Delta l = \int \frac{N(z)dz}{EA(z)}. \quad (2.7)$$

Для випадку, якщо поздовжнє зусилля у межах ділянки довжиною l змінюється по лінійному закону, і площа перерізу A постійна, вираження (2.7) після інтегрування прийме вигляд

$$\Delta l = \frac{(N_{\text{п}} + N_{\text{к}})}{2EA} l, \quad (2.8)$$

де $N_{\text{п}}$; $N_{\text{к}}$ – відповідно початкове та кінцеве значення поздовжнього зусилля на межах ділянки стержня.

При розтягу (стиску), крім поздовжньої, виникає також поперечна деформація.

Відносна поперечна деформація бруса в напрямку розмірів a і b (див. рис. 2.4) відповідно буде

$$\varepsilon'_a = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon'_b = \frac{\Delta b}{b},$$

де $\Delta a = a_1 - a$, $\Delta b = b_1 - b$ – абсолютні поперечні деформації;

a , b – початкові розміри перерізу бруса;

a_1 , b_1 – кінцеві розміри.

Для ізотропних матеріалів у будь-якому напрямку поперечні деформації однакові

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

У межах придатності закону Гуку при розтягу (стиску) поперечні деформації пропорційні поздовжнім деформаціям

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (2.9)$$

де μ – коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона).

Знак “–” показує, що збільшення поздовжніх розмірів бруса призводить до скорочення поперечних розмірів і навпаки.

Коефіцієнт Пуассона характеризує пружні властивості матеріалів і являє собою відношення по модулю поперечної деформації до поздовжньої

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.10)$$

Для різноманітних матеріалів він має значення від 0 (коркове дерево) до 0,5 (гума). Для сталі коефіцієнт Пуассона дорівнює 0,25...0,3, для чавуна, цинку, міді він має значення від 0,23 до 0,36.

У ряді випадків нормальна експлуатація машин можлива за умови, що абсолютні деформації її елементів не перевищать припустимих значень $[\Delta l]$, тобто при експлуатації повинна виконуватися нерівність

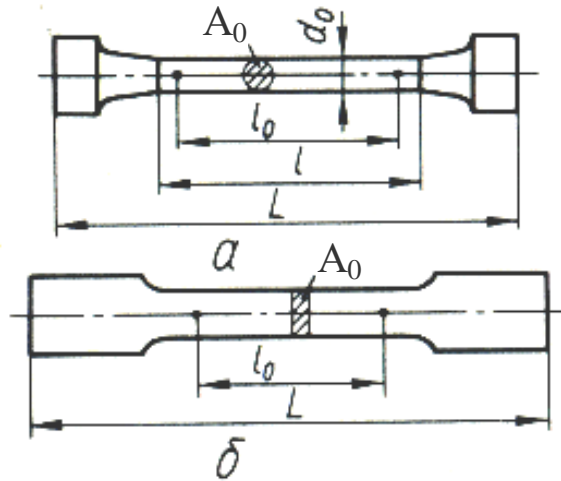
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (2.11)$$

Нерівність (2.11) являє собою умову жорсткості, а проведені по ній розрахунки є розрахунками на жорсткість.

2.4. Діаграми розтягу і стиску матеріалів

При проектуванні і розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин і споруд необхідно знати властивості матеріалів. Тому матеріали випробовують на розтяг, стиск, кручення, згинання і твердість.

Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтяг, оскільки при цьому виявляються найбільш важливі їх властивості. Із матеріалу, що випробовується, виготовляють спеціальні зразки. Частіше всього їх роблять циліндричними (рис. 2.5, а), із листового метала зазвичай виготовляють плоскі зразки (рис. 2.5, б).



а – циліндричні, б – плоскі

Рисунок 2.5 – Зразки для випробування на розтяг

Для випробувань на розтяг застосовують розривні машини, які дозволяють в процесі випробування визначати зусилля і відповідні їм деформації зразка. По цим даним будують початкову діаграму розтягу, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис – відповідні їм видовження. Характер діаграми розтягу залежить від властивостей матеріалу, що випробується. Типовий вид такої діаграми для мало вуглецевої сталі показаний на рис. 2.6.

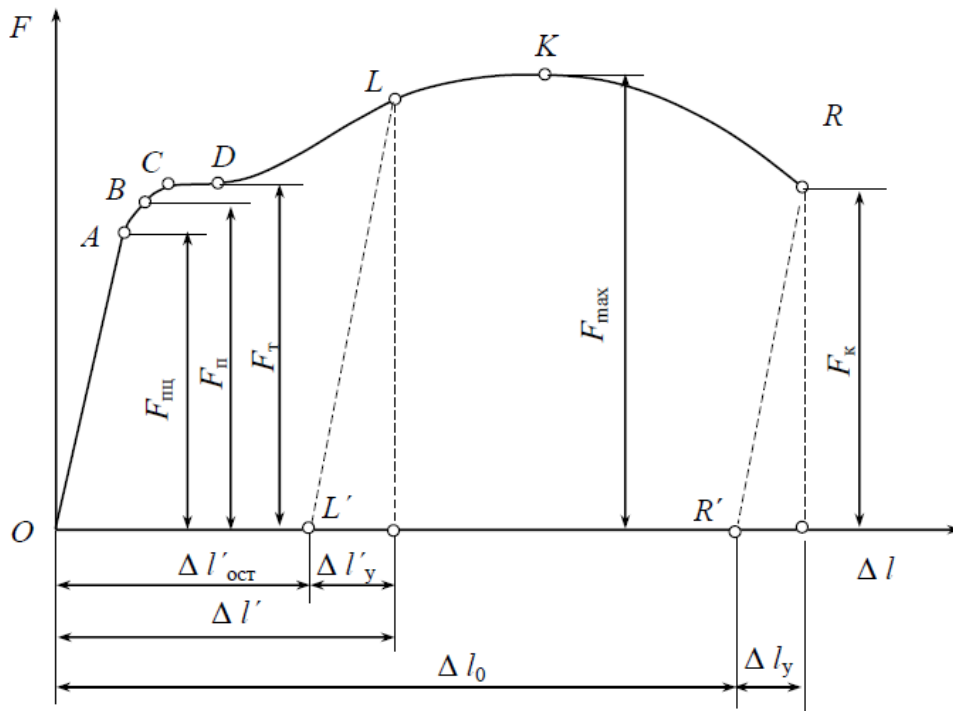


Рисунок 2.6 – Початкова діаграма розтягу

Перша ділянка (OA) – зона пружних деформацій, в якій має місце лінійна залежність між навантаженням і видовженням, тобто в межах прямої OA справедливий закон Гука.

Друга ділянка (AB) – зона пружних деформацій, в якій залежність між навантаженням і видовженням нелінійна. До точки B деформації залишаються пружними, тобто при знятті навантаження деталь відновляє свої розміри і форму.

Третя ділянка (BC) – ділянка, на якій з'являються пластичні деформації зразка. Цей процес називається текучістю матеріалу. На цій ділянці має місце нелінійна залежність між навантаженням і видовженням зразка.

Четверта ділянка (CD) – горизонтальна ділянка, на якій деформації зростають без збільшення навантаження. Ця ділянка називається площадкою текучості.

П'ята ділянка (DK) – зона зміцнення. Якщо зразок навантажити силою, що відповідає, наприклад, точці L діаграми, а потім зняти навантаження, то процес

розвантаження відображується прямою LL' , паралельною OA . Зразок при цьому буде мати залишкову деформацію $\Delta l'_{ост}$. При повторному навантаженні процес буде проходити по прямій $L'L$. При цьому ділянка, в границях якої справедливий закон Гука, збільшиться

($L'L > OA$). Пружна деформація при цьому складе $\Delta l'_y$. Явище зміцнення матеріалу в результаті витяжки матеріалу за границю текучості, називається наклепом.

Шоста ділянка (KR) – місцева текучість. Деформація зразка на цій ділянці характеризується появою шейки і видовженням зразку за рахунок його потоншення (рис. 2.7). В точці R відбувається руйнування зразку.



Рисунок 2.7 – Потоншення зразка

Залишкове видовження зразка після розриву – Δl_0 , пружна деформація – Δl_y (див. рис. 2.6).

Напруження, що визначається таким чином при розриві зразка, умовне і не може бути використано в якості характеристики механічних властивостей сталі.

Основними характеристиками пружності і міцності матеріалів, що використовуються в практичних розрахунках, є границя пружності $\sigma_{пр}$, границя текучості σ_m і тимчасовий опір (границя міцності) σ_b .

Для матеріалів, які не мають площадки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, при якому залишкова деформація складає величину 0.2% від довжини зразка, що вимірюється.

Враховуючи, що практично важко встановити початок відхилення від закону пропорційності і початок появи перших залишкових деформацій, вводять також поняття умовної границі пропорційності і границі пружності.

Умовною границею пропорційності називають найменше напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між напруженнями і деформаціями досягає певної величини, що встановлюється технічними умовами (наприклад 0.002% від довжини зразка, що вимірюється).

Умовною границею пружності називають найменше напруження, при якому залишкова деформація досягає заданої величини (зазвичай 0.001-0.05% від довжини зразка, що вимірюється).

Вид діаграми розтягу в координатах $F-\Delta l$ залежить не тільки від властивостей матеріалу, а і від розмірів зразка, що випробовується.

Щоб отримати діаграму, що характеризує тільки механічні властивості матеріалу, початкову діаграму розтягу перебудовують в координатах $\sigma-\varepsilon$. Ординати такої діаграми отримують діленням значень сили розтягу на

початкову площу поперечного перетину зразка $\left(\sigma = \frac{F}{A_0} \right)$, а абсциси – діленням

абсолютних видовжень розрахункової частини зразка на початкову її довжину

$$\left(\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

Така діаграма називається діаграмою напружень (рис. 2.8).

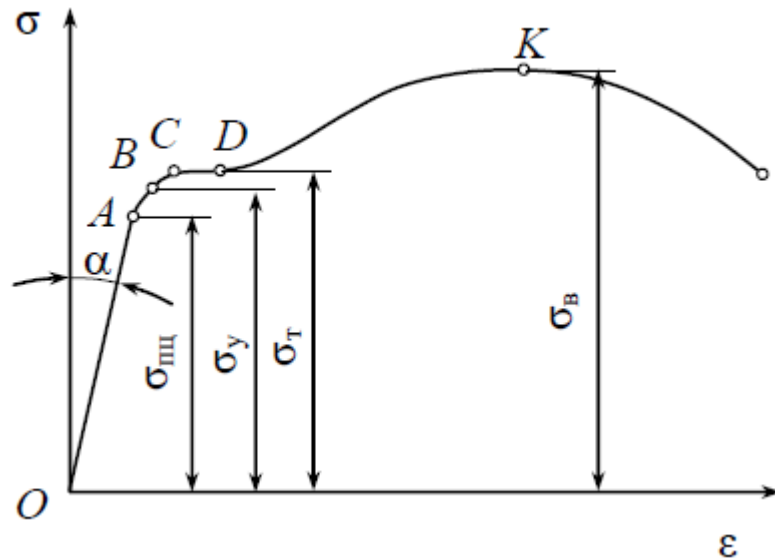


Рисунок 2.8 – Діаграма напружень маловуглицевої сталі при розтягу

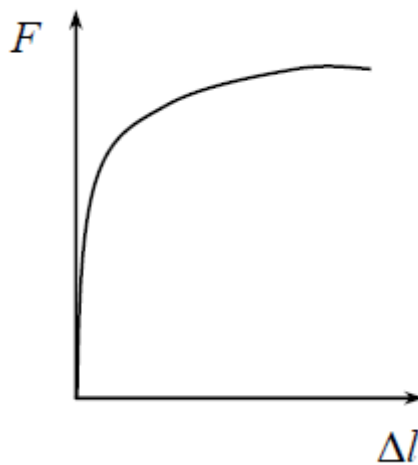


Рисунок 2.9 – Діаграма розтягу середньовуглицевої сталі

Вона має наступні характерні точки:

$\sigma_{пц}$ – границя пропорційності (найбільше напруження до якого виконується закон Гуку);

σ_y – границя пружності (найбільше напруження при якому залишкова деформація не виявляється);

σ_m – границя текучості (напруження при якому відбувається деформація без збільшення навантаження);

σ_g – границя міцності або тимчасовий опір (напруження, що відповідає F_{\max} , що передує руйнуванню зразка).

При дослідах на розтяг також визначаються:

E – модуль пружності першого роду :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha , \quad (2.12)$$

де σ, ε – напруження і відносна деформація зразка, що відповідаютьлюбій точці прямолінійної ділянки діаграми (пряма OA);

α – кут нахилу прямолінійного ділянки діаграми до горизонтальної осі (див. рисунок 2.8);

Повне видовження, отримане зразком перед руйнуванням, зменшиться після розриву, оскільки в частинах зразка зникнуть пружні деформації. *Відносним видовженням після розриву δ* називають відношення у відсотках прирощення розрахункової довжини зразка після розриву до його початкової довжини

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\% , \quad (2.13)$$

де l_1 – довжина зразка після розриву (вимірюється шляхом стикання двох частин розірваного зразка).

Відносне видовження після розриву характеризує пластичність матеріалу. В залежності від величини цього видовження матеріали поділяють на пластині і крихкі. Для перших можна умовно прийняти $\delta > 5\%$, а для других – $\delta < 5\%$.

Відносне звуження зразка після розриву ψ визначається діленням абсолютного зменшення площі поперечного перетину в шийці на початкову площу і виражається в відсотках від початкової площі поперечного перетину

$$\psi = \frac{\Delta A_0}{A_0} \cdot 100\% = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\% , \quad (2.14)$$

де A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка;

A_1 – площа поперечного перерізу в найбільш тонкому місці шийки в районі розриву .

До пластичних матеріалів відносять матеріали, у яких відносне залишкове видовження після розриву $\delta > 5\%$, до крихких – матеріали з $\delta < 5\%$.

Чим більше відносне звуження після розриву, тим пластичніше матеріал.

Відносне видовження δ і відносне звуження ψ є *характеристиками пластичності матеріалу*. Вони в певній мірі умовні, оскільки прирощення довжини і зменшення площі поперечного перетину зразка відносять до початкової довжини і початкової площі поперечного перетину. В дійсності пластична деформація розвивається на безперервно змінній довжині зразка.

На стиск досліджуються зразки у вигляді коротких циліндрів висотою $h \leq 3d$, або кубиків.

Діаграма стиску зразка із пластичного матеріалу наведена на рисунку 2.10. В початку діаграма стиску практично співпадає з діаграмою розтягу (лінії $OABCD$). Після точки D поперечний переріз зразка збільшується і стискуюча сила швидко зростає.

Для маловуглицевої сталі механічні характеристики (границя пропорційності, пружності, текучості, модуль пружності I роду) співпадають.

Діаграма стиску зразка із крихкого матеріалу приведена на рисунку 2.11.

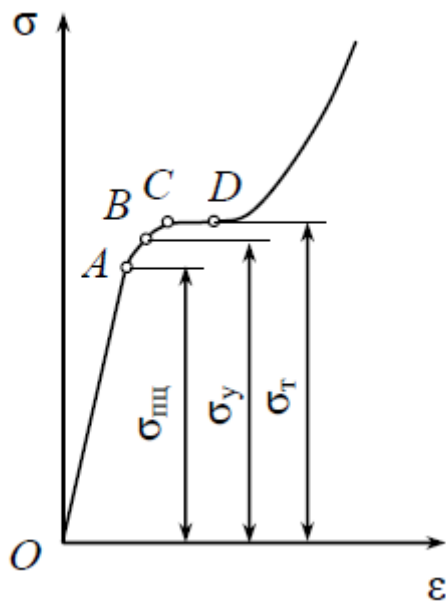


Рисунок 2.10 – Діаграма напружень маловуглицевої сталі при стиску

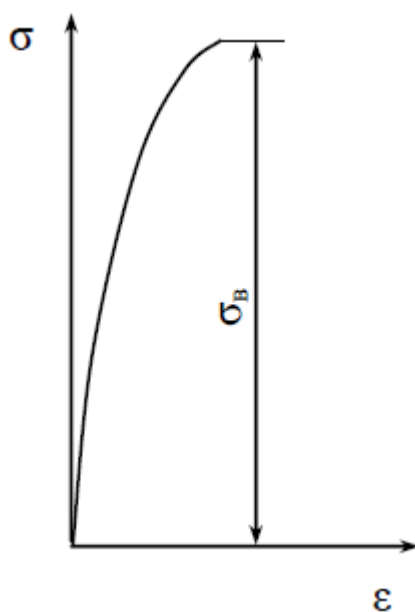


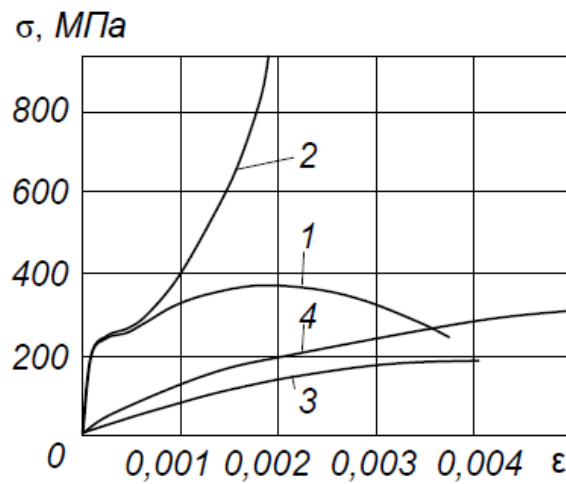
Рисунок 2.11 – Діаграма напружень чавуну при стиску

Як і при розтягуванні діаграма не має прямолінійної ділянки і площадки текучості. Однак, границя міцності при стиску значно вища, ніж при розтягуванні. Для чавуну, наприклад, границя міцності при стиску в 3...4,5 разів

вище, ніж при розтягові. Крихкі матеріали протидіють стиску значно краще ніж при розтягові.

Руйнування зразка починається з появи тріщин, які направлені під кутом 45° до його повздовжньої осі.

Представлення про властивості маловуглицевої сталі і сірого чавуну при розтязі і стиску дають деформації на рисунку 2.12.: *a* – розтяг маловуглицевої сталі; *б* – теж, сірого чавуну; *в* – стиск маловуглицевої сталі; *г* – теж, сірого чавуну.



1,2 – маловуглицева сталь відповідно при розтягу і стиску;

3,4 – сірий чавун відповідно при розтягу і стиску

Рисунок 2.12 – Діаграми напружень:

2.5. Визначення твердості

Під твердістю розуміють здатність матеріалу протидіяти проникливості в нього других тіл.

Найбільше розповсюдження мають досліді твердості за Бринелем, або Роквелом. Сутність дослідів полягає у удавленні під певним навантаженням загартованої кульки (при досліді за Роквелом) в дослідний матеріал.

Величина, що характеризує твердість, або число твердості за Бринелем (НВ) визначається за формулою

$$HB = \frac{F}{10A_{от}}, \quad (2.15)$$

де F – навантаження на кульку діаметром 10 мм, Н;

$A_{от}$ – площа поверхні сферичного відбитка, мм².

Твердість, що визначається різними способами, за допомогою спеціальних таблиць може бути приведена до твердості за Бринелем.

Між твердістю і другими механічними характеристиками (границями текучості, міцності) існує кореляційна залежність. Наприклад, для сірого чавуну $\sigma_b \cong 0,36HB$, для сірого чавуну $\sigma_b \cong 0,17(HB - 10)$.

Досліди на твердість більш прості ніж досліди на розтяг або стиск, так як тут не потрібно потужних розривних машин і спеціальних зразків. Дослідам можна підлягати безпосередньо деталі виробів. Тому в деяких випадках (особливо на виробництві) досліди на твердість використовують для оцінки величини границі міцності.

2.6. Допустимі напруження

Як уже зазначалось, деталі машин і інших конструкцій повинні задовольняти умові міцності і жорсткості. Розміри деталей необхідно підбирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувались і не отримували деформацій, що перевищують допустимі.

Залишкові деформації з'являються в пластичних матеріалах, коли напруження досягають границі текучості. Руйнування настає, коли напруження досягають величини тимчасового опору, при цьому деформації крихкого матеріалу можуть бути не значними. Таким чином, для деталей, виготовлених із пластичного матеріалу, небезпечним напруженням можна

вважати границю текучості, а для деталей із крихкого матеріалу – тимчасовий опір.

Природно, що ці напруження не можуть бути прийнятими в якості допустимих. Ї належить зменшити на стільки, щоб в експлуатаційних умовах діючі напруження завжди були менше границі пружності. Таким чином, допустиме напруження допустиме напруження може бути визначено по формулі

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} \quad (2.16)$$

де σ^0 – небезпечне напруження (σ_m або σ_b);

n – коефіцієнт запасу міцності, який показує, в скільки раз допустиме напруження менше небезпечного.

Величина запасу міцності залежить від того, яке напруження вважати небезпечним.

Для пластичних матеріалів у випадку статичного навантаження небезпечним напруженням належить вважати границю текучості, тобто $\sigma^0 = \sigma_m$, а $n = n_m$. Тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_m}{n_m} \quad (2.17)$$

На основі даних тривалої практики конструювання, розрахунку і експлуатації машин і споруд величина запасу міцності n_T для сталей при статичному навантаженні приймається рівною $n_m = 1.4 \dots 1.6$. Очевидно, менші значення n_T належить брати в тих випадках, коли матеріал більш однорідний, краще вивчені його властивості, повніше враховані навантаження, точніше метод розрахунку і розрахункові схеми.

Для крихких матеріалів при статичних навантаженнях небезпечним напруженням є тимчасовий опір і тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_{\epsilon}}{n_{\epsilon}} \quad (2.18)$$

Приймають, що запас міцності $n_{\epsilon}=2.5\dots3.0$.

Іноді допустимі напруження на розтяг позначають через $[\sigma_+]$, а на стиск – через $[\sigma_-]$. Крихкі матеріали краще опираються стиску, чим розтягу і для них $[\sigma_-]>[\sigma_+]$. Для сталей і більшості інших пластичних матеріалів можна прийняти $[\sigma_+]=[\sigma_-]$ і позначати допустиме напруження в такому випадку через $[\sigma]$ без індексу.

2.7. Умова міцності і жорсткості. Види розрахунків

Основна задача опору матеріалів – забезпечити надійні розміри деталей, що зазнають ту чи іншу силову, температурну або іншу дію. Такі розміри можна визначити з розрахунку на міцність і жорсткість.

Розглянемо умови міцності і жорсткості для випадків простого розтягу і стиску.

Відмітимо перед усім, що небезпека руйнування характеризується не стільки величинами внутрішніх зусиль і моментів в перетині, скільки величинами найбільших нормальних і дотичних напружень, які діють в небезпечних точках перетину, а також їх комбінацією. Фізично очевидно, що скільки завгодно великі напруження матеріал витримувати не в змозі. Тому величини найбільших напружень із умови надійності роботи деталі необхідно обмежувати допустимими напруженнями.

У випадку розтягу або стиску стержня знаходять небезпечні перетини, в яких напруження досягають найбільших значень по абсолютній величині, і для цих перетинів записують умову міцності

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{A} \right| \leq [\sigma] \quad (2.19)$$

При розтягові в праву частину цієї умови підставляють допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+]$, а при стискові – допустиме напруження на стиск $[\sigma_-]$.

Використовуючи умову міцності (2.19), можна розв'язувати три типи задач:

1) по відомим навантаженням для вибраного матеріалу знайти надійні з точки зору міцності розміри поперечного перетину стержня (проектний розрахунок);

2) по відомим розмірам і матеріалу деталі перевірити, чи може вона витримувати задане навантаження (перевірочний розрахунок);

3) по відомим розмірам деталі, матеріалу і схемі завантаження визначити допустиму величину навантаження.

В певних випадках для забезпечення нормальної роботи машин і споруд розміри їх деталей потрібно вибирати так, щоб забезпечувалась умова жорсткості. При розтягові (стискові) умова жорсткості має наступний вигляд

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) dx}{EA(x)} \leq [\Delta l] \quad (2.20)$$

де Δl – зміна розмірів деталі,

$[\Delta l]$ – допустима величина цієї зміни.

Нагадаємо, що розрахунок по умові жорсткості завжди треба доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконана, а умова міцності не задовольняється, то задачу необхідно розв'язувати із умови міцності.

Приклад

Для заданого ступінчастого стержня побудувати епюри осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня, якщо: $F_1=2\text{кН}$, $F_2=4\text{кН}$, $F_3=3\text{кН}$, $A_1=20\text{см}^2$,

$A_2=2A_1=40\text{см}^2$, $A_3=3A_1=60\text{см}^2$, $a=1\text{м}$, $b=1\text{м}$, $c=1.5\text{м}$, $d=0.5\text{м}$, $D=5\text{см}$. Матеріал стержня – сталь: $\gamma=78.5\cdot 10^{-3}\text{ Н/см}^3$.

Стержень розбивається на ділянки АВ, ВС, CD і DE з постійною площею поперечного перерізу а також по точкам прикладення зовнішніх сил. Для визначення осьових зусиль застосовується метод перерізів. На рис. 2.13 б, в, г, д показані перерізи на кожній ділянці, дію відкинутої верхньої частини замінено відповідно зусиллями N_1 , N_2 , N_3 і N_4 . Величина цих зусиль визначається з умови рівноваги відсічених частин.

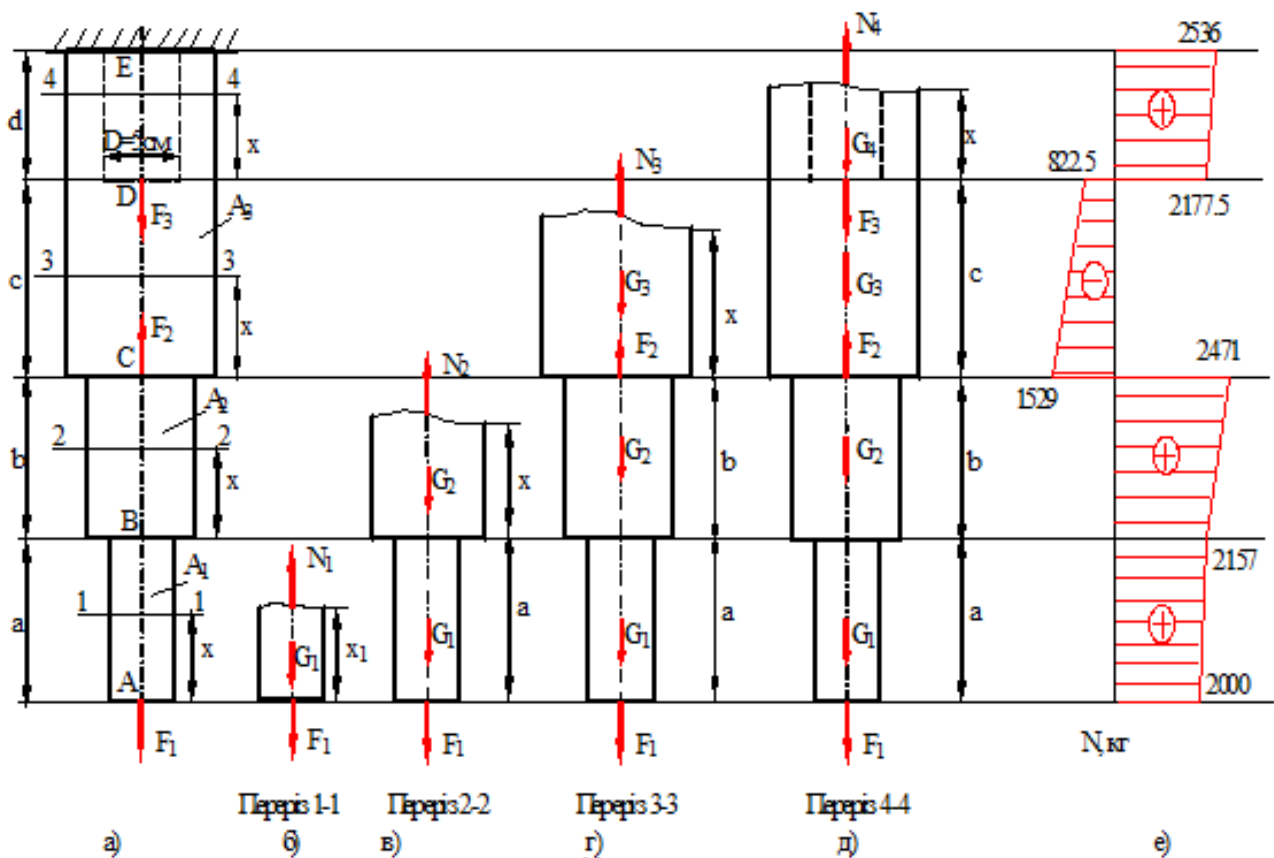


Рисунок 2.13 – Перерізи стержня

Переріз 1-1 ($0\leq x\leq 100\text{см}$)

$$\sum Y=0; N_1-G_1-F_1=0,$$

де G_1 – вага відсіченої частини першої ділянки,

$$N_1 = G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_1 dx + F_1 = \gamma A_1 x + F_1,$$

$$N_1(x=0) = \gamma A_1 \cdot 0 + F_1 = F_1 = 2 \text{кН} = 2000 \text{Н},$$

$$N_1(x=100) = \gamma A_1 \cdot 100 + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2157 \text{Н},$$

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq 100 \text{см}$)

$$\sum Y = 0; N_2 - G_2 - G_1 - F_1 = 0,$$

$$N_2 = G_2 + G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 = \gamma A_2 x + \gamma A_1 a + F_1,$$

$$N_2(x=0) = \gamma A_2 \cdot 0 + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 0 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2157 \text{Н},$$

$$N_2(x=100) = \gamma A_2 \cdot 100 + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2471 \text{Н}.$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq 150 \text{см}$)

$$\sum Y = 0; N_3 - G_3 + F_2 - G_2 - G_1 - F_1 = 0,$$

$$N_3 = G_3 - F_2 + G_2 + G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_3 dx - F_2 + \int_0^b \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 =$$

$$= \gamma A_3 x - F_2 + \gamma A_2 b + \gamma A_1 a + F_1,$$

$$N_3(x=0) = \gamma A_3 \cdot 0 - F_2 + \gamma A_2 \cdot b + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 0 - 4000 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = -1529 \text{Н},$$

$$N_3(x=150) = \gamma A_3 \cdot 150 - F_2 + \gamma A_2 \cdot b + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = -822.5 \text{Н}.$$

Переріз 4-4 ($0 \leq x \leq 50 \text{см}$)

$$\sum Y = 0; N_4 - G_4 - F_3 - G_3 + F_2 - G_2 - G_1 - F_1 = 0,$$

$$N_4 = G_4 + F_3 + G_3 - F_2 + G_2 + G_1 + F_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \gamma A_4 dx + F_3 + \int_0^c \gamma A_3 dx - F_2 + \int_0^b \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 = \\
&= \gamma A_4 x + F_3 + \gamma A_3 c - F_2 + \gamma A_2 b + \gamma A_1 a + F_1, \\
A_{ome} &= \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 19.6 \text{ см}^2; A_4 = A_3 - A_{ome} = 60 - 19.6 = 40.4 \text{ см}^2, \\
N_4(x=0) &= \gamma A_4 \cdot 0 + F_3 + \gamma A_3 \cdot c - F_2 + \gamma A_2 \cdot b + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = \\
&= 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40.4 \cdot 0 + 3000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + \\
&\quad + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2177.5 \text{ Н}, \\
N_4(x=50) &= \gamma A_4 \cdot 50 + F_3 + \gamma A_3 \cdot c - F_2 + \gamma A_2 \cdot b + \gamma A_1 \cdot a + F_1 = \\
&= 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40.4 \cdot 50 + 3000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + \\
&\quad + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2336 \text{ Н}.
\end{aligned}$$

2.8. Статично невизначені стержневі системи при розтягу (стиску)

На практиці зустрічаються системи, для визначення внутрішніх зусиль в яких рівнянь статички виявляється недостатньо. Такі системи називають *статично невизначеними*. В цих системах число накладених зв'язків більше, чим це необхідно для їх кінематичної незмінності, тобто для їх рівноваги. Іншими словами, всі с.н.с. мають додаткові або “зайві” з точки зору кінематичної незмінності зв'язки, постановка яких диктується умовами міцності або жорсткості.

Різниця між числом невідомих зусиль, які підлягають визначенню, і числом невідомих рівнянь статички визначає степінь статичної невизначеності системи, тобто степінь статичної невизначеності рівна числу додаткових або “зайвих” зв'язків. Розрізняють один, два і т.д. раз статично невизначені системи.

Визначення всіх невідомих сил, або, як говорять, розкриття статичної невизначеності, можливе тільки шляхом складання рівнянь, які доповнюють число рівнянь статички до числа невідомих. Ці додаткові рівняння відображають

особливості геометричних зв'язків, накладених на системи, які деформуються, і умовно називаються *рівняннями переміщень* або *рівняннями деформацій*.

Розв'язок статично невизначених задач проводять в наступній послідовності:

1. Відкидаємо зв'язки і заміняємо їх реакціями, скориставшись при цьому методом перерізів.
2. Складаємо всі можливі незалежні рівняння статички для відсічених елементів системи, які містять невідомі зусилля. Визначаємо ступінь статичної невизначеності системи.
3. Розглядаючи систему в деформованому стані, встановлюємо зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції і складаємо рівняння сумісності переміщень.
4. В рівняннях сумісності переміщень деформації елементів виражають на основі закону Гука через діючі в них невідомі зусилля.
5. Розв'язують спільно отриману систему рівнянь, яка складається з рівнянь статички і рівнянь сумісності переміщень, відносно невідомих зусиль.

Приклад

Для заданої системи визначити діаметр стержнів, якщо відоме відношення їх площ і величина діючого навантаження.

Дано: $a=1\text{м}$; $\alpha=60^\circ$; $F=12\text{т}$; $A_1=2\cdot A_2$; $E_1=E_2=E$; матеріал сталь 3; $[\sigma]=160\text{МПа}=1600\text{кг/см}^2$ (додаток 3).

В задачі необхідно визначити діаметр стержнів, тобто виконати проектний розрахунок. Так як стержні системи зазнають деформації розтягу-стиску, то проектний розрахунок виконується по формулі

$$A \geq \frac{|N|}{[\sigma]}$$

Допустиме напруження нам задано, тому для відповіді на питання задачі необхідно визначити нормальні сили в поперечних перерізах стержнів 1 і 2.

Скористаємося методом перерізів і розсічемо підвіски поперечними перерізами, відкинувши верхню частину стержня 1 і нижню частину стержня 2 та замінимо їх дію нормальними силами N_1 і N_2 (рис.2.14,б). Але тепер виникає питання – як направити N_1 і N_2 ? Тобто який із стержней стиснутий, а який – розтягнутий? Для простих систем, подібних тій яку ми розглядаємо, відповідь на це питання достатньо очевидна. Однак, для більш складних стержневих систем відповісти на нього не так просто. Тому в більшості випадків зручно використовувати формальний підхід.

Використовуючи формальний підхід, припустимо, що стержень 1 розтягнутий, стержень 2 стиснутий, тобто направимо N_1 від перерізу, а N_2 до перерізу. Відкинемо також в'язі, накладені на балку в шарнірі і замінимо їх реакціями R_x і R_y .

Для визначення чотирьох невідомих N_1 , N_2 , R_x , R_y ми можемо скласти лише 3 незалежних рівняння статки, тобто $\sum X=0$; $\sum Y=0$; $\sum M_0=0$. Таким чином, система 1 раз статично невизначена.

Перші два рівняння статки крім N_1 і N_2 містять невідомі реакції R_x і R_y , визначати які нема необхідності. Таким чином, відносно зусиль які нас цікавлять N_1 і N_2 ми маємо лише одне рівняння:

$$\sum M_0 = F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - N_1 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ - N_2 \cdot 1.5 \cdot a = 0.$$

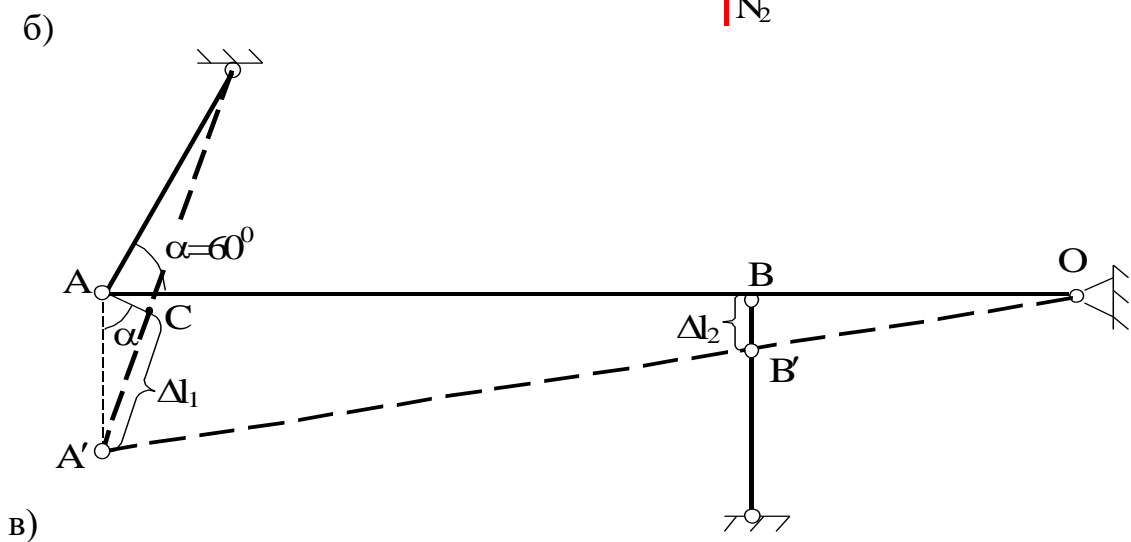
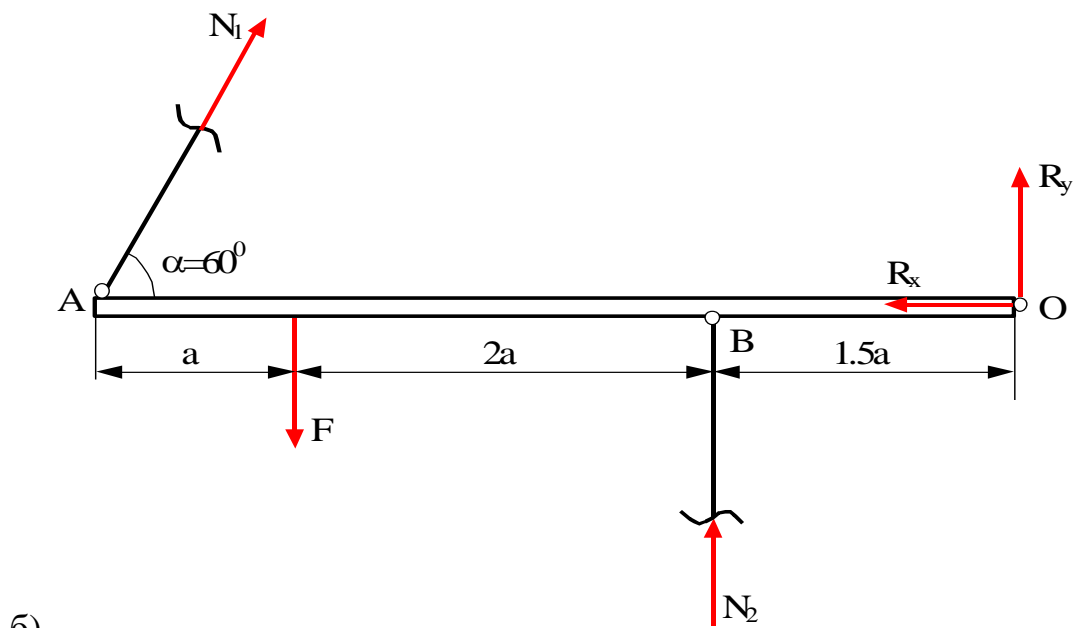
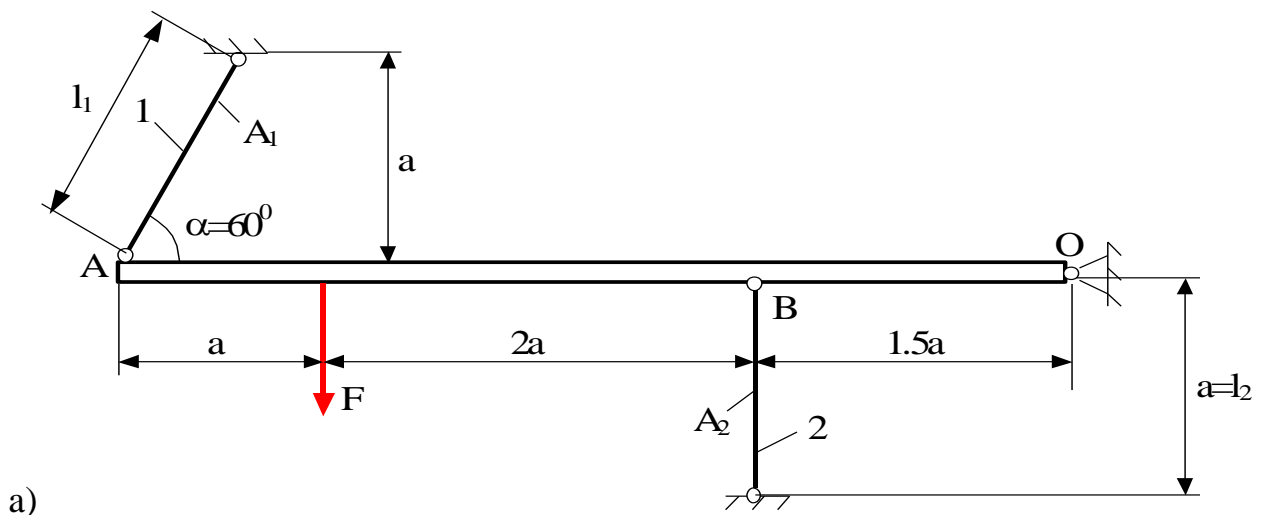


Рисунок 2.14 – а) задана система (приклад), б) нормальні сили N_1 і N_2 в перерізі стержнів

Для визначення N_1 і N_2 необхідно скласти одне рівняння спільності переміщень. З цією метою розглянемо систему в деформованому стані.

З подібності $\triangle OBB'$ і $\triangle OAA'$ находимо

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a}{1.5 \cdot a} = \frac{4.5}{1.5} = 3.$$

Із $\triangle AA'C$ $AA' = \frac{\Delta l_1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\Delta l_1}{\sqrt{3}}$.

З урахуванням того, що $AA' = 3 \cdot BB'$, вираз приймає вид

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 60^\circ} = 3 \cdot \Delta l_2; \frac{2\Delta l_1}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \Delta l_2.$$

це рівняння сумісності переміщень.

Виразимо Δl_1 і Δl_2 через зусилля в стержнях N_1 і N_2

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}.$$

Приймаючи до уваги, що $A_1 = 2 \cdot A_2$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $l_1 = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $l_2 = a$

$$\frac{2 \cdot N_1 \cdot 2 \cdot a}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot A_2} = 3 \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_2},$$

$$N_1 = 4,5N_2.$$

Сумісним розв'язком рівнянь визначимо N_1 і N_2

$$F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - 4.5 \cdot N_2 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ - N_2 \cdot 1.5 \cdot a = 0,$$

$$F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - N_2 \cdot [4.5 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ + 1.5 \cdot a] = 0,$$

$$N_2 = \frac{F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a)}{4.5 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ + 1.5 \cdot a} = \frac{12000 \cdot 3.5}{4.5 \cdot 4.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.5} = 2206.23 \text{ кг},$$

$$N_1 = 4.5 \cdot N_2 = 4.5 \cdot 2206.23 = 9928.03 \text{ кг}.$$

Отримані позитивні знаки зусиль говорять про те, що при навантаженні системи силою F стержень 1 зазнає розтягу, і стержень 2 – стиску.

Порівняння величин N_1 і N_2 показує, що перший стержень є більш навантаженим. Визначимо необхідну площу A_1 .

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{9928,03}{1600} = 6.2 \text{ см}^2$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}; d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6.2}{\pi}} = 2.81 \text{ см}$$

Приймаємо $d_1 = 2.8$ см. Тоді $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2.8^2}{4} = 6.16 \text{ см}^2$

Напруження в стержні 1

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{9928.03}{6.16} = 1611.69 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Перенапруження

$$\frac{1611.69 - 1600}{1600} \cdot 100\% = 0.7\% \leq 5\%$$

Тому можна прийняти $d_1=2.8\text{см}$.

Перевіримо міцність 2-го стержня

$$A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{6.16}{2} = 3.08\text{см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{2206.23}{3.08} = 716.31\text{кг/см}^2 < [\sigma] = 1600\text{кг/см}^2.$$

Умова міцності – виконується.

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3.08}{\pi}} = 1.98\text{см}.$$

Приймаємо $d_2=2\text{см}$.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається деформацією розтягу (стиску)?
2. Що називається абсолютною та відносною деформаціями? Їх одиниці вимірювання.
3. Сформулюйте закон Гука; як він виражається математично?
4. Що характеризує модуль поздовжньої пружності матеріалу та його одиниця вимірювання?
5. В яких межах застосовується закон Гука?
6. Які напруги виникають в поперечному перерізі бруса при розтязі (стискові)?
7. Що є основними механічними характеристиками матеріалу?
8. Чим характеризуються пластичні властивості матеріалів?
9. Які фактори впливають на вибір величини допустимої напруги та коефіцієнта запасу міцності?
10. В чому полягає умова міцності при розтязі та стискові?
11. Які системи називаються статично невизначеними?

3. ВИДИ НАПРУЖЕНИХ СТАНІВ МАТЕРІАЛУ

3.1. Напруження в точці

Напруження є результатом взаємодії часток тіла при його навантаженні. У відповідності до гіпотези про суцільність матеріалу належить вважати, що кожна частка тіла в скільки завгодно малі області має нескінченне множину інших часток, які оточують її по всім напрямкам. Розташована в даній точці частка по різному взаємодіє з кожною із цих сусідніх часток. Тому в одній і тій же точці по різним напрямкам напруження різні і тільки в певних випадках вони однакові по всім напрямкам.

Досліджуючи напружений стан тіла в даній точці A , навколо неї зазвичай виділяють елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 3.1 а), який у збільшеному масштабі показаний на рис. 3.1 б, де початок координат суміщений з точкою A , а координатні осі направлені вздовж відповідних ребер, так що грані паралелепіпеда перпендикулярні до напрямків декартових осей x , y , z . До цих граней прикладені внутрішні сили, що заміняють дію віддаленої частини тіла. Позначимо повні напруження на гранях елемента через p_x , p_y , p_z . Тут індекси позначають нормаль до площадки, на якій діють напруження. Оскільки елемент дуже малий можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно. Повні напруження на гранях елемента представляють нормальними і дотичними складовими – проекціями повних напружень на координатні осі (рис. 3.1 в).

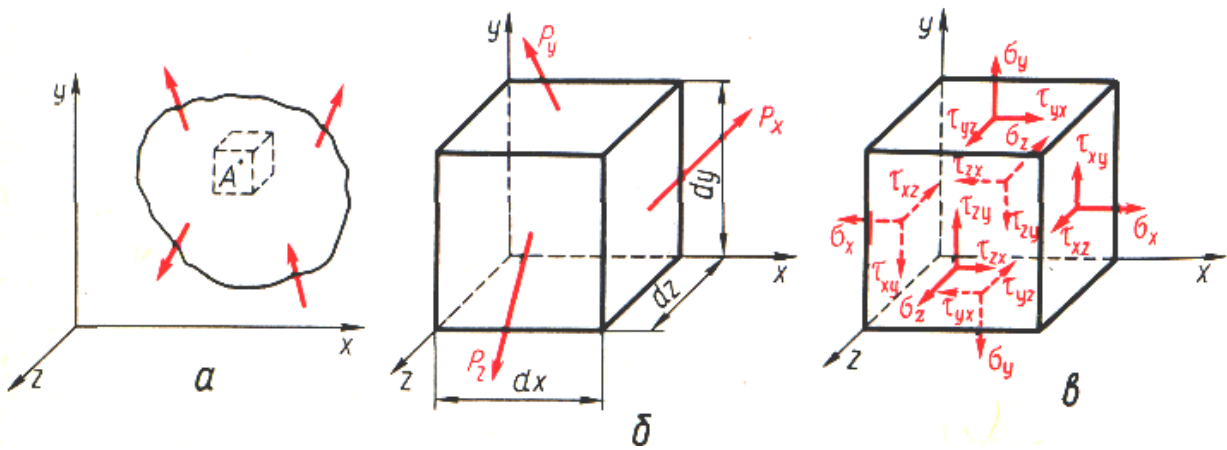


Рисунок 3.1 – Напружений стан тіла

Нормальні напруження позначають буквою σ з індексом, що відповідає напрямку нормалі до площадки, на якій вони діють. Дотичні напруження позначають літерою τ з двома індексами: перший відповідає напрямку нормалі до площадки, а другий – напрямку самого напруження.

Таким чином, на гранях елементарного паралелепіпеда, виділеного навколо точки навантаженого тіла, діють дев'ять компонентів напруження. Запишемо їх у вигляді наступної матриці

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Ця сукупність напружень називається *тензором напружень*.

3.2. Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження

Не всі дев'ять компонентів напружень, що діють на гранях елементарного паралелепіпеда, незалежні. В цьому легко переконатися якщо скласти умову

рівноваги елемента у відношенні його обертань (рис. 3.1, в). Для цього прирівняємо до нуля суму моментів всіх сил, прикладених до граней елемента, відносно осей x , y , z

$$\Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0 \quad (3.2)$$

Складемо рівняння моментів відносно осі z . Сили, паралельні цій осі і ті що перетинають її, в рівняння не увійдуть. Моменти сил $\sigma_x dydz$ на двох гранях, перпендикулярних до осі x , урівноважуються, як і моменти сил $\sigma_y dx dz$ на верхній і нижній гранях елемента. Таким чином, отримуємо $\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0$. Звідси випливає

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Аналогічно із двох інших рівнянь знаходимо

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Отже, маємо рівності, які називаються *законом парності дотичних напружень*: дотичні напруження на будь-яких двох, але взаємно перпендикулярних площадках, направлені перпендикулярно до лінії перетину площадок, рівні по величині. При цьому вони намагаються повернути елемент в різні сторони. Таким чином, завдяки властивості парності дотичних напружень число незалежних компонентів напружень в кожній точці тіла зменшується з дев'яти до шести.

При зміні орієнтації граней виділеного елемента змінюються також діючі на його гранях напруження. При цьому можна провести такі площадки, на яких

дотичні напруження дорівнюють нулю. Площинки, на яких дотичних напружень немає, називаються *головними площадками*, а нормальні напруження на цих площадках – *головними напруженнями*. Як би не було завантажено тіло, в кожній його точці є, принаймні, три головні площадки, причому вони взаємно перпендикулярні. Таким чином, в кожній точці можуть діяти і три головних напруження і вони теж взаємно перпендикулярні. Напрямки, паралельні головним напруженням, називаються *головними напрямками напружень* або *головними осями в даній точці*.

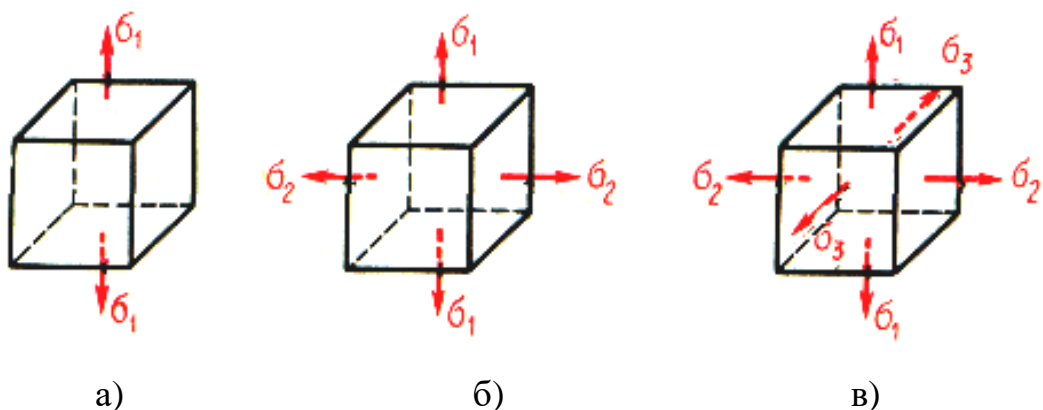
Головні напруження умовимося позначати σ_1 , σ_2 і σ_3 , при цьому індекси належить розставляти так, щоб виконувалась рівність

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (3.3)$$

Розуміти цю нерівність належить в алгебраїчному змісті.

Таким чином, в точках навантаженого тіла можна виділити елементарні паралелепіпеди, на гранях яких діють тільки нормальні – головні напруження.

Напружений стан, в якому тільки одно головне напруження відмінне від нуля, а два інших дорівнюють нулю, називається *одновісним* або *лінійним* (рис. 3.2, а).



а – лінійний, б – плоский, в – об’ємний

Рисунок 3.2 – Види напруженого стану

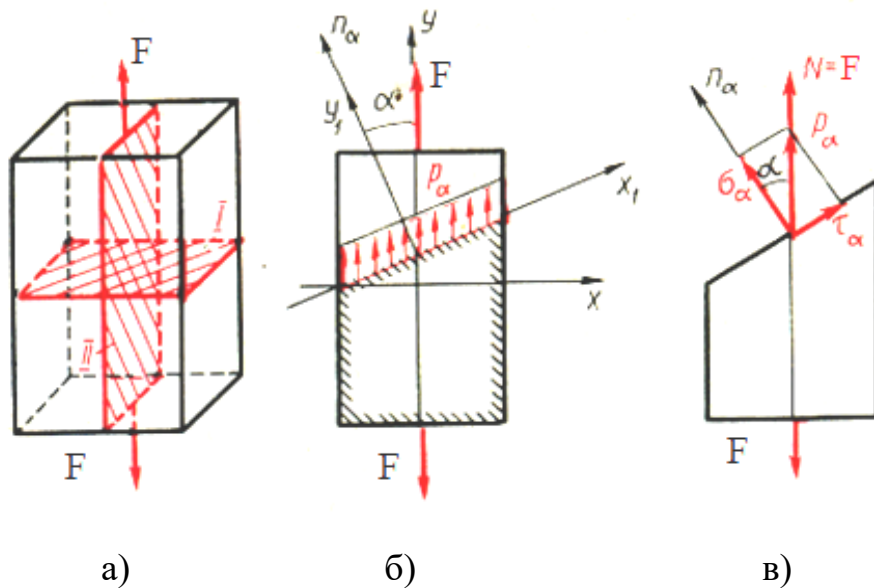
Якщо два головних напруження відмінні від нуля, а одно рівне нулю, то такий напружений стан називається *двохвісним* або *плоским* (рис. 3.2, б). Коли всі три головних напруження відмінні від нуля, маємо *трьохосний* або *об'ємний напружений стан* (рис. 3.2, в).

3.3. Лінійний напружений стан

Елементи, що перебувають в лінійному напруженому стані, можна виділити біля певних точок стержня, що працює на згин або складний опір, але головним чином на стиск.

Розглянемо призматичний стержень, що зазнає простий розтяг (рис. 3.3,

а). В поперечних перетинах нормальні напруження $\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}$, а дотичні напруження тут дорівнюють нулю. Відповідно, ці перетини є головними площадками.



а – призматичний стержень, б – елемент, що перебуває в лінійному напруженому стані, в –

Рисунок 3.3 – Визначення напружень

Перейдемо тепер до визначення напружень в неголовних, похилих площадках. В подальшому елемент, що перебуває в лінійному (а також в плоскому) напруженому стані, будемо зображувати у вигляді плоскої фігури (рис. 3.3, б).

Припустимо зовнішня нормаль n_α до проведеної площадки складає з віссю стержня (а відповідно, і з лінією дії прикладеної сили) кут α . Умовимося вважати кут α позитивним, якщо він відраховується проти годинникової стрілки. Очевидно, такий же кут α складає площадка з поперечним перетином стержня. Проведемо також похилі осі x_I, y_I , направивши ось y_I по нормалі до площадки, а ось x_I – вздовж площадки.

Проведену таким чином похилу площадку будемо позначати (α) - площадкою, а діючі на ній повні, нормальні і дотичні напруження – $p_\alpha, \sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Для визначення цих напружень застосуємо метод перетинів. Вважаючи, що похила площадка розсікла стержень на дві частини, відкинемо одну із них, наприклад верхню, і розглянемо рівновагу нижньої частини.

Осьова сила в перетині $N=F$ є рівнодієюною повних напружень p_α . Вважаємо, що вони направлені паралельно осьовій силі і рівномірно розподілені в точках проведеного перетину, площа якого

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha} \quad (3.4)$$

Відповідно

$$p_\alpha A_\alpha = N \quad (3.5)$$

Звідси

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha \quad (3.6)$$

Проектуючи p_α на нормаль n_α і на площину перетину, отримаємо вираз для нормальних і дотичних напружень на похилій площадці (рис. 44, в)

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha \quad (3.7)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha \quad (3.8)$$

або з врахуванням (3.6)

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (3.9)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (3.10)$$

У випадку лінійного і плоского напруженого стану використовують зазвичай таке правило знаків для дотичних напружень: *дотичне напруження на площадці вважають позитивним, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, відносно будь-якої точки, взятої всередині неї, за годинниковою стрілкою.*

3.4. Плоский напружений стан

Всі визначення і правила, які були введені в попередньому параграфі, залишаються в силі і для плоского напруженого стану. Оскільки, однак, тут є два відмінних від нуля головних напруження, необхідно уточнити умову для підрахунку кутів, що характеризують нахил площадок. Будемо вважати, що цей кут завжди відраховується від напрямку алгебраїчно більшого з двох відмінних нуля головних напружень до нормалі похилої площадки, причому завжди береться гострий кут, але з урахуванням його знаку.

Визначимо напруження на похилих площадках. Розглянемо елемент (рис. 3.4), грані якого є головними площадками. По ним діють позитивні напруження σ_1 і σ_2 , третє головне напруження $\sigma_3 = 0$.

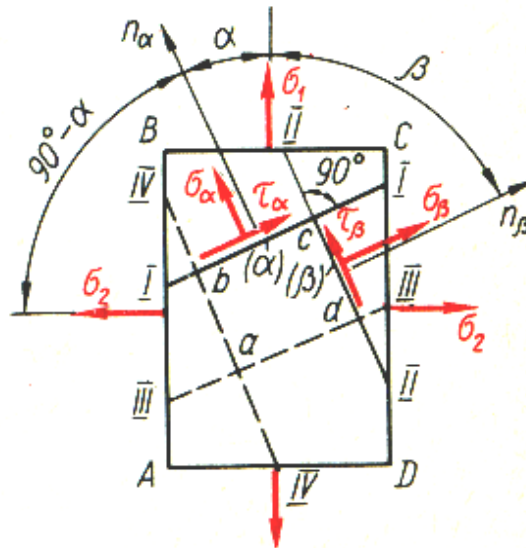


Рисунок 3.4 – Напруження на похилих площадках

Проведемо перетин I-I, який визначить площадку (α), що характеризується позитивним кутом α . Напруження σ_α і τ_α по цій площадці будуть викликатися як дією σ_1 , так і дією σ_2 . Застосовуючи принцип суперпозиції, тобто розглядаючи даний плоский напружений стан як накладання двох ортогональних одноосних напружених станів, можемо записати

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha \quad (3.11)$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha \quad (3.12)$$

де σ'_α і τ'_α - напруження, викликані дією σ_1 ,

σ''_α і τ''_α - напруження, викликані дією σ_2 .

Щоб визначити σ'_α і τ'_α скористаємося безпосередньо формулами (3.11) і (3.12)

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad (3.13)$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \quad (3.14)$$

Для визначення σ''_α і τ''_α належить врахувати, що n_α утворює з напрямком σ_2 кут $90^\circ - \alpha$. Тоді, з урахуванням, що $\sin 2[-(90^\circ - \alpha)] = -\sin 2\alpha$, $\cos^2[-(90^\circ - \alpha)] = \sin^2 \alpha$, отримаємо

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (3.15)$$

$$\tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.16)$$

Склавши, знайдемо, що

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (3.17)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.18)$$

Скористуємося формулами (3.17) і (3.18) для знаходження напружень в площадці, перпендикулярні до площадки (α). Умовимося таку площадку позначати (β). Нормаль n_β до неї (рис. 3.5, перетин II-II) утворює з напрямком σ_1 кут $\beta = -(90^\circ - \alpha)$.

Формули (3.17) і (3.18) вірні для будь-яких α . Підставивши в них замість α вказане значення β , будемо мати

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (3.19)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.20)$$

Сукупність формул (3.17–3.20) дає можливість знаходити напруження по будь-яким взаємноперпендикулярним похилим площадкам, якщо відомі головні напруження. Проведемо аналіз цих формул.

Складаючи ліві і праві частини рівностей (3.17) і (3.19), виявляємо, що

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.21)$$

Тобто сума нормальних напружень по двох взаємноперпендикулярних площадках не залежить від нахилу цих площадок і дорівнює сумі головних напружень. Інакше ця властивість може бути сформульована так: *сума нормальних напружень по двох взаємно перпендикулярних площадках інваріантна по відношенню до нахилу цих площадок.*

Із формули (3.18) і (3.20) бачимо, що як і в одноосному напруженому стані, дотичні напруження досягають найбільшої величини при $\alpha = \pm 45^{\circ}$, тобто по площадкам, нахиленим до головних площадок під кутом 45° , причому

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.22)$$

3.5. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці

В загальному випадку напруженого стану при довільній орієнтації елементарного паралелепіпеда, виділеного біля точки навантаженого тіла, на його гранях діють шість незалежних компонентів тензора напружень σ_x , σ_y , σ_z ,

τ_{xy} , τ_{zx} , τ_{yz} . Вважаючи ці напруження вихідними, визначимо напруження на довільній площадці ABC , проведеній біля точки (рис. 3.5).

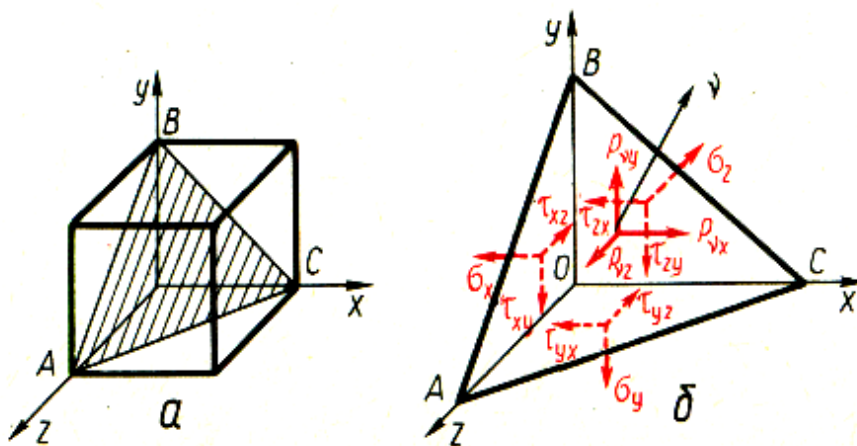


Рисунок 3.5 – Напруження на довільній площадці

Повне напруження на площадці з нормаллю ν

$$p_\nu = \sqrt{p_{\nu x}^2 + p_{\nu y}^2 + p_{\nu z}^2} \quad (3.23)$$

де $p_{\nu x}, p_{\nu y}, p_{\nu z}$ – проекції повного напруження p_ν на координатні осі x, y, z .

Нормальне напруження на довільній площадці

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (3.24)$$

де $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$, $n = \cos(z, \nu)$

По відомому повному і нормальному напруженням легко знайти дотичне напруження на площадці

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2} \quad (3.25)$$

Таким чином, по відомим компонентам напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках можна визначити напруження на будь-якій площадці, проведеній через дану точку.

Головні напруження в точці даного навантаженого певним чином тіла мають стаціонарні значення, що не залежать від вибору початкової системи координатних осей x, y, z , тобто орієнтації в просторі виділеного початкового паралелепіпеда

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const}$$

Ці величини називаються першим, другим і третім інваріантами тензора напружень.

При будь-якому об'ємному напруженому стані найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.26)$$

і діє на площадках, паралельних головному напруженню σ_2 і нахилених під кутом 45° до головних напружень σ_1 і σ_3 .

Важливим, особливо при вивченні пластичної деформації, є дотичне напруження, що діє по площадці, яка рівно нахилена до всіх головних напрямків. Така площадка називається *октаедричною*, оскільки вона паралельна грані октаедра, який може бути утворений із куба. Нормаль до цієї площадки утворює рівні кути з головними напрямками $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

Тоді

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}\tau_{окт} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Це напруження називається *октаедричним*. Напруження $\sigma_{окт}$ є як би середнє напруження для даного трьохосного напруженого стану.

В теорії пластичності виявилось зручним вводити в розрахунки так звану інтенсивність напружень σ_u , пов'язану з $\tau_{окт}$ залежністю

$$\sigma_u = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} \quad (3.29)$$

або виражену через головні напруження формулою

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}\quad (3.30)$$

Всі представлені залежності і способи розв'язку задач вірні для напружених станів, що відповідають як пружним, так і пластичним деформаціям.

3.6. Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації і розглядаючи питання міцності при об'ємному і плоскому напружених станах, будемо у відповідності з основними гіпотезами і допущеннями припускати, що матеріал підкорюється закону Гука, а деформації малі.

При простому розтягу-стиску відносна повздовжня деформація

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.31)$$

А відносна поперечна деформація

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (3.32)$$

Ці дві рівності виражали закон Гука (залежність між деформаціями і напруженнями) при простому розтягові або стискові, тобто при лінійному напруженому стані. Встановимо залежності між деформаціями і напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

Розглянемо деформацію елемента тіла, вибравши цей елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда розмірами $a \times b \times c$ (рис. 3.6).

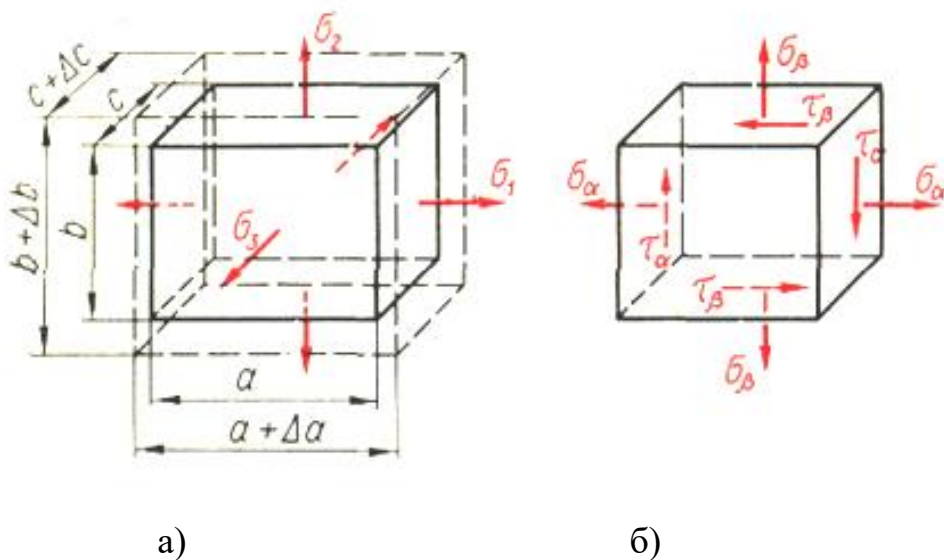


Рисунок 3.6 – Деформація елемента тіла

По гранях паралелепіеда діють головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (припускаємо, що всі вони позитивні). Внаслідок деформації ребра елемента змінюють свою довжину і стають рівними $a+\Delta a, b+\Delta b, c+\Delta c$.

Величини

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}, \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}, \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c} \quad (3.33)$$

називаються головними видовженнями і є відносними видовженнями в головних напрямках.

Застосовуючи принцип суперпозицій, можна записати

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' \quad (3.34)$$

де ε_1' – відносне видовження в напрямку σ_1 , викликане дією тільки напружень σ_1 (при $\sigma_2=\sigma_3=0$),

ε_1'' – відносне видовження в тому ж напрямку, викликане дією тільки σ_2 ,

ε_1''' – видовження, викликане дією σ_3 .

Оскільки напрямок σ_1 для самого напруження σ_1 є повздовжнім, а для напружень σ_2 і σ_3 – поперечним, то, застосовуючи формули (3.31) і (3.32), знаходимо, що

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E} \quad (3.35)$$

Склавши ці величини, будемо мати

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

Аналогічно отримаємо вирази і для двох інших головних видовжень. В результаті

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Формули (3.36) виражають *узагальнений закон Гука для ізотропного тіла*, тобто залежність між лінійними деформаціями і головними напруженнями в загальному випадку трьохосного напруженого стану.

Встановимо зв'язок між відносною зміною об'єму ε_V і головними напруженнями.

Відносна зміна об'єму

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.37)$$

Виразивши головні видовження через головні напруження за допомогою формул (3.36), отримаємо

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.38)$$

3.7. Потенційна енергія деформації

Потенційною енергією деформації називається енергія, яка накопичується в тілі при його пружній деформації.

Величину потенціальної енергії деформації, що приходить на одиницю об'єму тіла, називають *питомою потенційною енергією деформації*. В різних точках тіла величина питомої потенціальної енергії деформації може бути різною.

У випадку простого розтягу або стиску (рис. 3.7) використовуючи формулу

$$U = \frac{F \Delta l}{2} \quad (3.39)$$



Рисунок 3.7 – Випадок простого розтягу(стиску)

Питома потенційна енергія

$$u = \frac{F \Delta l}{2 A l} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} \quad (3.40)$$

Розрахуємо тепер питому потенційну енергію в загальному випадку об'ємного напруженого стану. Для цього виріжемо елемент у вигляді кубика з довжинами ребер, рівними одиниці (рис. 3.8), грані якого є головними площадками. На цих площадках діють головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 . Оскільки площі граней рівні одиниці, то діючі в них зусилля чисельно дорівнюють σ_1 , σ_2 і σ_3 . Вони виконують роботу на тих переміщеннях, які отримують грані внаслідок деформації елемента, що розглядається. Переміщення в даному випадку чисельно рівні головним видовженням ε_1 , ε_2 і ε_3 , оскільки ребра мають одиничну довжину.

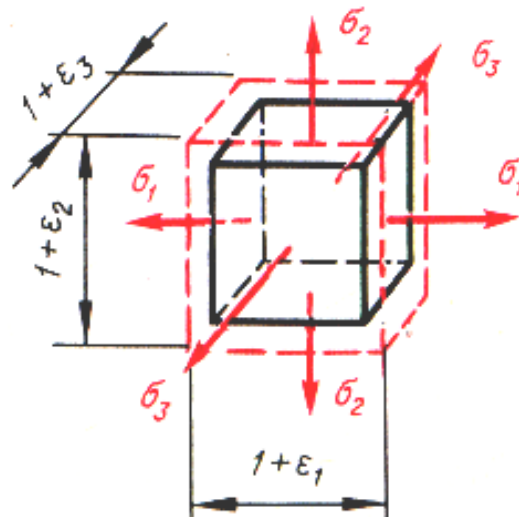


Рисунок 3.8 – Елемент у вигляді кубика з довжинами ребер, рівними одиниці

Таким чином, використовуючи формулу (3.40)

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (3.41)$$

Підставивши вирази ε_1 , ε_2 і ε_3 із формули (3.36) в формулу (3.41), знайдемо, що

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (3.42)$$

3.8. Питома потенційна енергія формозмінення

При деформації елемента (рис. 3.8) змінюються як його об'єм так і форма. У відповідності з цим можна вважати, що повна питома потенційна енергія деформації

$$u = u_V + u_\phi, \quad (3.43)$$

де u_V – питома потенційна енергія зміни об'єму, тобто енергія, що накопичується за рахунок зміни об'єму;

u_ϕ – питома потенційна енергія формозмінення, тобто енергія, що накопичується внаслідок зміни форми елемента.

Безпосередньо визначити u_ϕ буде складно, тому знайдемо спочатку u_V . Це можна зробити, виходячи з припущення про те, що в різних елементах при дії різних головних напружень величини u_V буде однаковою.

Крім елемента, що розглядається, введемо ще допоміжний елемент. Нехай допоміжний елемент – теж одиничний кубик, але по граням його діють однакові головні напруження $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'$. Для цього елемента, згідно формул (3.38), (3.42) і (3.43)

$$\varepsilon'_V = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma' \quad (3.44)$$

а

$$u' = u'_V + u'_\phi = \frac{3(1-2\mu)}{2E} (\sigma')^2 \quad (3.45)$$

Але, очевидно, допоміжний елемент при деформуванні змінює тільки свій об'єм, форма ж його не змінюється (залишається кубічною). Тому $u'_\phi = 0$ і тоді,

$$u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E}(\sigma')^2 \quad (3.46)$$

Виберемо величину σ' такою, щоб $\varepsilon'_V = \varepsilon_V$, тобто щоб

$$\frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma' = \frac{3(1-2\mu)}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.47)$$

Звідси

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.48)$$

Оскільки в обох елементах зміни об'єму однакові, дотримуючись прийнятого припущення можна стверджувати, що

$$u_V = u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \quad (3.49)$$

тобто

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.50)$$

Тепер, згідно формули (3.43),

$$u_\phi = u - u_V \quad (3.51)$$

підставивши сюди значення u і u_V з формул (3.42) і (3.50), після елементарних перетворень отримаємо, що

$$\begin{aligned}
 u_{\phi} &= \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\
 &= \frac{1+\mu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Це і є враз для питомої потенційної енергії формозмінення.

Запитання для самоперевірки

1. Які площадки і напруження називаються головними?
2. Який напружений стан матеріалу називається лінійним?
3. Який напружений стан матеріалу називається плоским?
4. Який напружений стан матеріалу називається об'ємним?
5. Як визначаються напруження на довільних площадках?
6. Як визначається потенційна енергія деформації?
7. Як визначається потенційна енергія формозмінення?

4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

4.1. Напружений стан в точці

Дев'ять компонентів напруження

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array}$$

в трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через точку тіла (рис. 4.1), що розглядається, повністю визначають напружений стан в цій точці, тобто, володіючи їх значеннями, можна знайти напруження в будь-якій площадці ABC, яка проходить через точку, що розглядається.

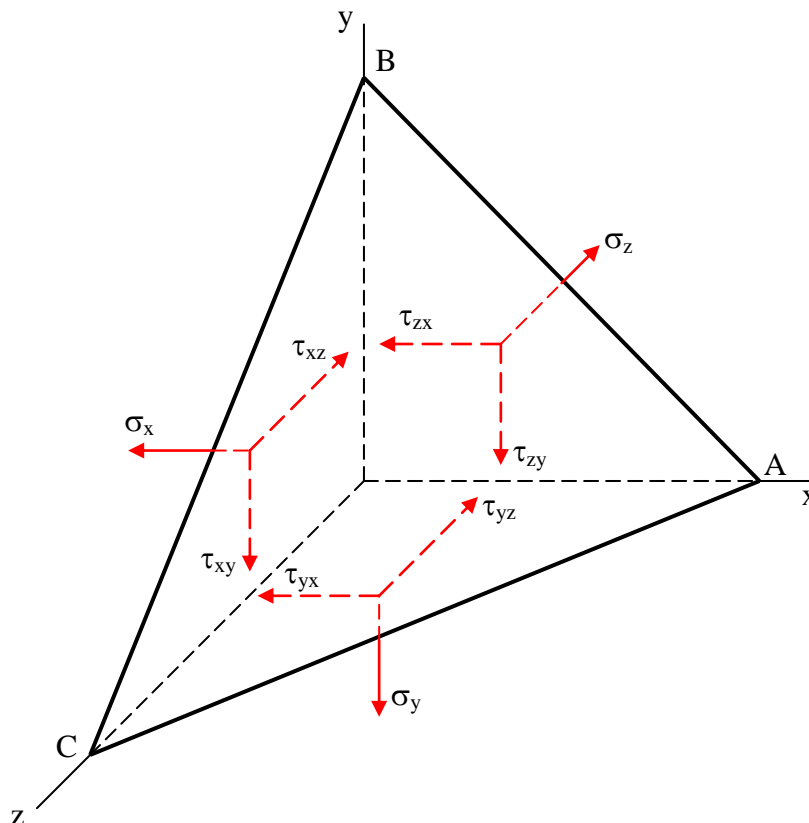


Рисунок 4.1 – Напруження в трьох взаємно перпендикулярних гранях елементарного тетраедра

Проекції X_v, Y_v, Z_v на вісі координат x, y, z повного напруження p_v (рис. 4.2) в певній похилій площадці визначаються по формулам

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

де l, m, n – направляючі косинуси нормалі v до площадки.

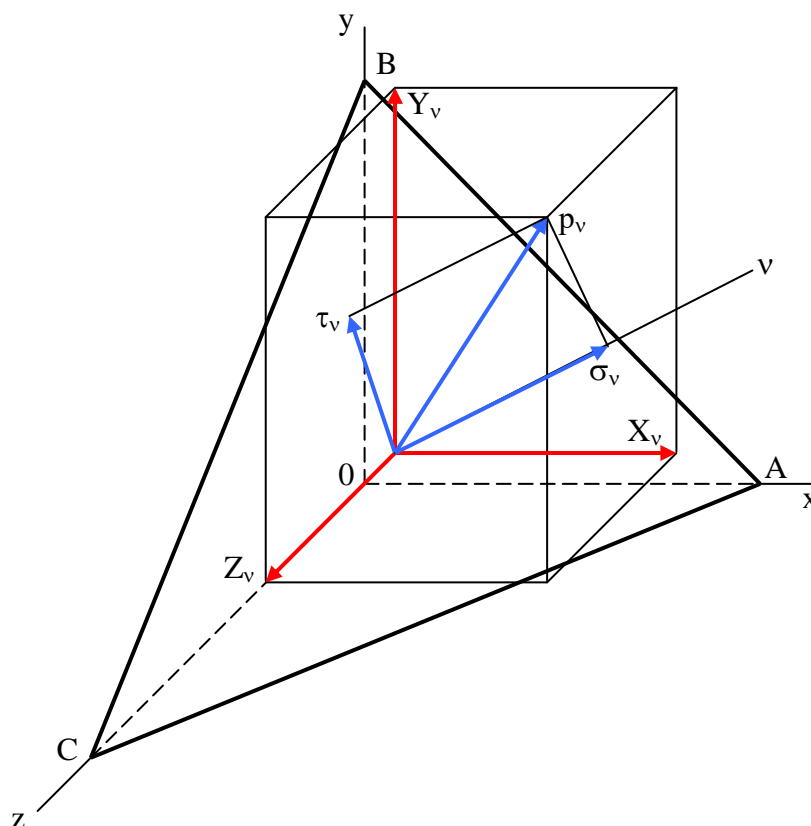


Рисунок 4.2 – Напруження в похилій грані елементарного тетраедра

Після розрахунку проєкцій повного напруження X_v, Y_v, Z_v вже неважко визначити повне, нормальне і дотичне напруження в цій площадці по формулам

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2};$$

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n;$$

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}.$$

Приведені вище дев'ять компонентів напруження утворюють тензор напруження

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Згідно закону парності дотичних напружень в двох взаємно перпендикулярних площадках складові дотичних напружень, перпендикулярні до лінії перетину цих площадок, рівні між собою і направлені або до лінії перетину цих площадок, або від неї, тобто $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Таким чином, компоненти тензора напруження, розташовані симетрично відносно головної діагоналі (діагоналі, що проходить через нормальні напруження σ_x , σ_y , σ_z), рівні між собою.

Як правило для зображення напруженого стану в точці тіла навколо останньої виділяють елемент об'єму в вигляді прямокутного паралелепіпеда, три ребра якого приймаються за вісі координат (рис. 4.3). По гранях виділеного елемента зображають складові напруження у відповідних площинах. При цьому мається на увазі, що довжини ребер паралелепіпеда дорівнюють нулю, тобто паралелепіпед є точкою.

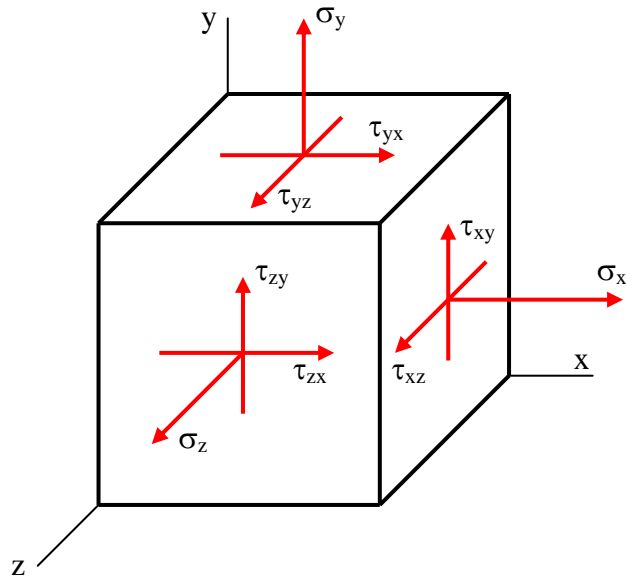


Рисунок 4.3 – Модель напруженого стану

В подальшому при розгляді загальних питань теорії пластичності і повзучості будуть використані тензорні позначення, які дозволяють записувати низку формул в більш компактному вигляді.

При використанні тензорної символіки декартові координати x , y , z позначають через x_1 , x_2 , x_3 або в загальному вигляді x_i , де індекс i приймає значення 1, 2, 3.

Нормальні напруження позначають σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , а дотичні σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} . Загальний компонент записують у вигляді σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Окремі компоненти отримують із загального компонента заміною букв i і j цифрами 1, 2 і 3.

В подальшому під σ_{ij} будемо розуміти також сукупність всіх дев'яти компонентів напруження, тобто тензор напруження.

Позначимо через n_i складові одиничного вектору нормалі до площадки, рівні направляючим косинусам нормалі.

Тоді формули (4.1) можна представити у вигляді

$$X_{vj} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i .$$

Скорочений запис сумування полягає в тому, що знак суми опускається і по всякому, що двічі повторюється, в одночлені індексу проводиться сумування по значенням 1, 2, 3. В такому випадку попередня формула приймає вигляд

$$X_{vj} = \sigma_{ij} n_i \quad (4.2)$$

або

$$\left. \begin{aligned} X_{v1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ X_{v2} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ X_{v3} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \right\}$$

де $X_{v1}=X_v$, $X_{v2}=Y_v$, $X_{v3}=Z_v$,

$$\sigma_{11}=\sigma_x, \sigma_{22}=\sigma_y, \sigma_{33}=\sigma_z,$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\tau_{yx}=\tau_{xy}, \sigma_{31}=\sigma_{13}=\tau_{zx}=\tau_{xz}, \sigma_{32}=\sigma_{23}=\tau_{zy}=\tau_{yz}$$

$$n_1=l, n_2=m, n_3=n.$$

Індекс, що повторюється (у випадку i , що розглядається), називають підставним, а, що не повторюється (j), вільним.

4.2. Диференціальні рівняння рівноваги

Виділимо із тіла нескінченно малий елемент у формі паралелепіпеда, грані якого паралельні координатним осям (рис. 4.4). Ребра паралелепіпеда позначимо через dx , dy і dz . Дію на паралелепіпед відкинутої частини тіла замінимо силами. На рис. 4.4 зображені сили тільки на видимих гранях. На невидимих гранях сили будуть ті ж, що і на паралельних їм видимих гранях без відповідних прирощень. Проекції на вісі x , y , z сили, що приходиться на одиницю об'єму (об'ємної сили), позначимо через X , Y , Z .

Рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

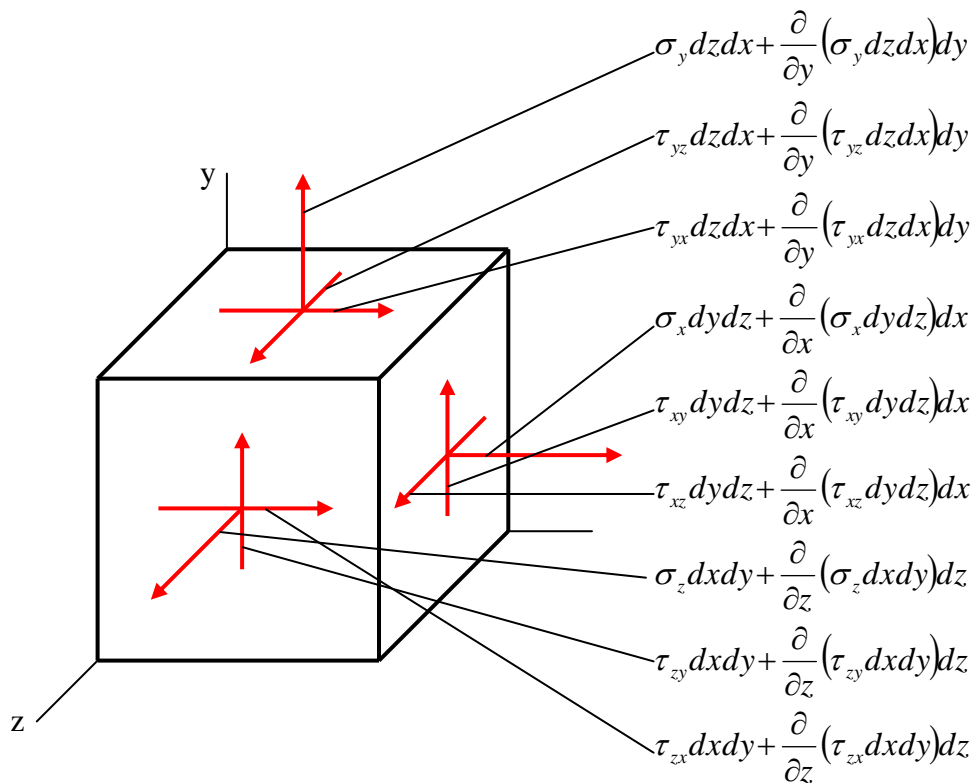


Рисунок 4.4 – Елементарний паралелепіпед у рівноважному стані

Таким чином, три рівняння рівноваги (4.3) пов'язують шість незалежних компонентів напруження σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

В скороченому запису рівняння (4.3) мають вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \quad (4.4)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

де $X_1=X, X_2=Y, X_3=Z,$

$$\sigma_{11}=\sigma_x, \sigma_{22}=\sigma_y, \sigma_{33}=\sigma_z,$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\tau_{yx}=\tau_{xy}, \sigma_{31}=\sigma_{13}=\tau_{zx}=\tau_{xz}, \sigma_{32}=\sigma_{23}=\tau_{zy}=\tau_{yz},$$

$$x_1=x, x_2=y, x_3=z.$$

4.3. Розкладання тензора напружень

Загальний випадок напруженого стану (рис. 4.5, а) може бути представлений у вигляді суми двох напружених станів (рис. 4.5, б, в).

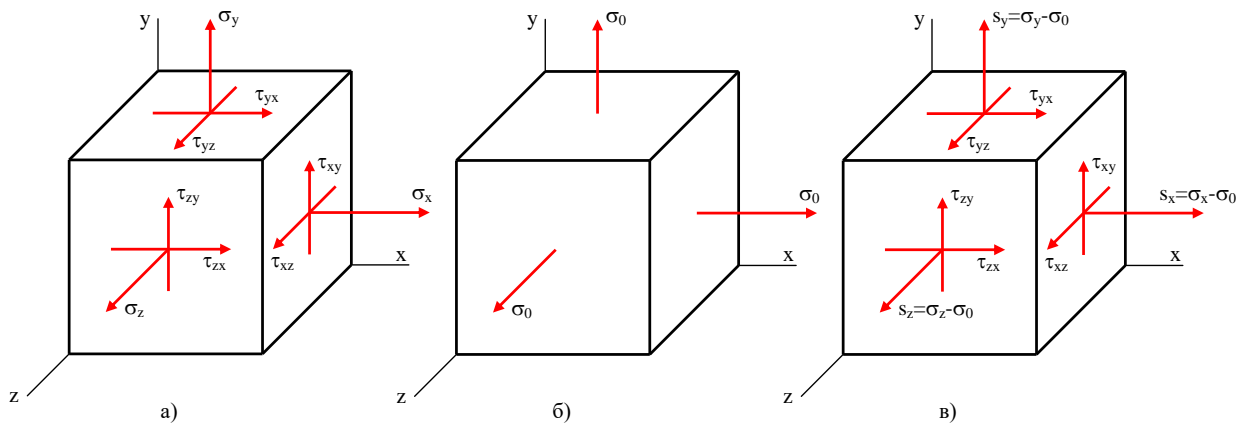


Рисунок 4.5 – Розкладання тензора напружень на шаровий тензор і девіатор

Тензор напруження першого напруженого стану (рис. 4.5, б) називають шаровим тензором

$$T_{\sigma_0} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix},$$

де

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (4.5)$$

а другого напруженого стану (рис. 4.5, в) – дівіатором напруження

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, що компоненти дівіатора:

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \sigma_x - \sigma_0; & s_{xy} &= \tau_{xy}; \\ s_y &= \sigma_y - \sigma_0; & s_{yz} &= \tau_{yz}; \\ s_z &= \sigma_z - \sigma_0; & s_{zx} &= \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Представлене на рис. 4.5 розкладання загального випадку напруженого стану на два рівносильне розкладання тензора на сферичний тензор і дівіатор напруження:

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma.$$

З формул (4.5) і (4.6) випливає, що

$$s_x + s_y + s_z = 0, \quad (4.7)$$

тобто в другому напруженому стані сума нормальних напружень в координатних площинах дорівнює нулю.

В межах пружності об'ємна деформація прямо пропорційна сумі нормальних напружень. Нижче буде встановлено, що це положення може бути розповсюджене і за межі пружності. Отже, в другому напруженому стані (рис. 4.5, в) зміна об'єму дорівнює нулю і спотворюється форма елемента. Очевидно, що в першому напруженому стані (рис. 4.5, б) форма елемента не змінюється, а змінюється його об'єм.

Як показують досліди, при усесторонніх рівних розтягах або стисках пластичні деформації не виникають. Утворення їх пов'язано із спотворенням форми елемента. Тому виконане розкладання загального випадку напруженого стану на два фізично виправдано. Девіатор напружень характеризує, наскільки заданий напружений стан відрізняється (ухиляється) від усестороннього рівного розтягу або стиску з головними напруженнями, рівними середньому арифметичному нормальних напружень вихідного напруженого стану.

Введемо величину, яка називається символом Кронекера (дельта-символом). Вона визначається наступними співвідношеннями:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Тоді, використовуючи тензорні позначення і записи сумування, компоненти девіатора напружень можна представити у вигляді

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad (4.8)$$

де
$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} - \delta_{11}\sigma_0 & s_{21} &= \sigma_{21} - \delta_{21}\sigma_0 & s_{31} &= \sigma_{31} - \delta_{31}\sigma_0 \\ \text{або} \quad s_{12} &= \sigma_{12} - \delta_{12}\sigma_0 & s_{22} &= \sigma_{22} - \delta_{22}\sigma_0 & s_{32} &= \sigma_{32} - \delta_{32}\sigma_0 \\ s_{13} &= \sigma_{13} - \delta_{13}\sigma_0 & s_{23} &= \sigma_{23} - \delta_{23}\sigma_0 & s_{33} &= \sigma_{33} - \delta_{33}\sigma_0 \end{aligned}$$

$$\text{де} \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} (\delta_{11}\sigma_{11} + \delta_{21}\sigma_{21} + \delta_{31}\sigma_{31} + \delta_{12}\sigma_{12} + \delta_{22}\sigma_{22} + \delta_{32}\sigma_{32} + \delta_{13}\sigma_{13} + \delta_{23}\sigma_{23} + \delta_{33}\sigma_{33})$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$$

$$s_{11} = s_x, \quad s_{22} = s_y, \quad s_{33} = s_z,$$

$$s_{21} = s_{12} = s_{yx} = s_{xy}, \quad s_{31} = s_{13} = s_{zx} = s_{xz}, \quad s_{32} = s_{23} = s_{zy} = s_{yz},$$

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{22} = \sigma_y, \quad \sigma_{33} = \sigma_z,$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} = \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} = \tau_{zy} = \tau_{yz},$$

4.4. Головні площадки і головні напруження

В кожній точці тіла існують, принаймні, три взаємно перпендикулярні площадки, в яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площадки називають *головними*, а нормальні напруження в них – *головними нормальними напруженнями* або *головними напруженнями*.

Головні напруження є коренями кубічного рівняння

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0 \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
& I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\
& I_2(T_\sigma) = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \\
& I_3(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.
\end{aligned} \right\} (4.11)$$

Використовуючи тензорні позначення і записи сумування, представимо формули (4.11) у вигляді

$$\left. \begin{aligned}
& I_1(T_\sigma) = \sigma_{ii}; \\
& I_2(T_\sigma) = -\frac{1}{2} \left[(\sigma_{ii})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij} \right]; \\
& I_3(T_\sigma) = \frac{1}{3} \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{kl} + \frac{1}{6} (\sigma_{ii})^3 - \frac{1}{2} (\sigma_{ii})\sigma_{ij}\sigma_{ij}.
\end{aligned} \right\} (4.12)$$

В подальшому в більшості випадків будемо притримуватися наступних позначень для головних напружень: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Таким чином, через σ_1 позначено алгебраїчно найбільше, а через σ_3 алгебраїчно найменше з головних напружень (з урахуванням знаку).

Оскільки головні напруження не можуть залежати від вибору осей координат, коефіцієнти кубічного рівняння також не змінюються при повороті осей координат, тобто є інваріантами. Їх називають відповідно першим $[I_1(T_\sigma)]$, другим $[I_2(T_\sigma)]$ і третім $[I_3(T_\sigma)]$ інваріантами тензора напружень.

Із формул (4.11) випливає, що вирази інваріантів тензора напружень через головні напруження мають вигляд:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2(T_\sigma) = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1;$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Очевидно, що формули (4.11) дозволяють визначити інваріанти шарового тензора і девіатора напружень. Для цього необхідно підставити в них компоненти шарового тензора (4.5) і девіатора напружень (4.6). Визначимо другий і третій інваріанти девіатора напружень. [Перший інваріант девіатора напружень згідно формули (4.7) дорівнює нулю]. Для цього підставимо в формули (4.11) компоненти девіатора напружень (4.6), використовуючи при цьому співвідношення (4.5). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]; \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} I_3(D_\sigma) &= \begin{vmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \left[2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3 - 3(\sigma_x^2\sigma_y + \sigma_y^2\sigma_z + \sigma_z^2\sigma_x + \sigma_x\sigma_y^2 + \sigma_y\sigma_z^2 + \sigma_z\sigma_x^2)) + 12\sigma_x\sigma_y\sigma_z + \right. \\ &\left. + 9\sigma_x(\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 9\sigma_y(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{zx}^2) + 9\sigma_z(-2\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 54\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

У скороченому тензорному запису згідно формул (4.12)

$$\left. \begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}; \\ I_3(D_\sigma) &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

4.5. Інтенсивність напружень

Інтенсивністю напружень називають величину, пропорційну квадратному кореню з другого інваріанта девіатора напружень. В залежності від прийнятого коефіцієнта пропорційності розрізняють поняття інтенсивності нормальних напружень або просто інтенсивності напружень

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} \quad (4.16)$$

і інтенсивності дотичних напружень

$$T = \sqrt{I_2(D_\tau)}. \quad (4.17)$$

Зіставляючи вирази (4.16) і (4.17), заключаємо, що

$$\sigma_i = \sqrt{3}T. \quad (4.18)$$

Підставляючи у вираз (4.16) співвідношення (4.13), отримаємо

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (4.19)$$

В скорочених позначеннях згідно формул (4.15) і (4.16) маємо

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij}. \quad (4.20)$$

Залежність інтенсивності напружень від головних напружень має вигляд

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (4.21)$$

Для випадку одноосного розтягу ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) з формули (4.21) маємо

$$\sigma_i = \sigma. \quad (4.22)$$

Таким чином, коефіцієнт пропорційності $\sqrt{3}$ в формулі (4.16) був вибраний для того, щоб в найпростішому випадку одноосного розтягу інтенсивність напружень співпала з величиною найбільшого головного напруження.

У випадку чистого зсуву ($\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$) із формули (4.21) маємо

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau. \quad (4.23)$$

Із залежностей (4.16) і (4.21) випливає також, що інтенсивність дотичних напружень T співпадає з величиною найбільшого дотичного напруження при чистому зсуві:

$$T = \tau.$$

Розглянемо різну інтерпретацію поняття інтенсивності напружень.

Виберемо декартову систему координат σ_1 , σ_2 , σ_3 (рис.4.6). Напружений стан в певній точці тіла характеризується вектором \overline{OP} , компоненти якого σ_1 , σ_2 , σ_3 :

$$\overline{OP} = \sigma_1 \overline{i_1} + \sigma_2 \overline{i_2} + \sigma_3 \overline{i_3},$$

де $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – одиничні вектори осей координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

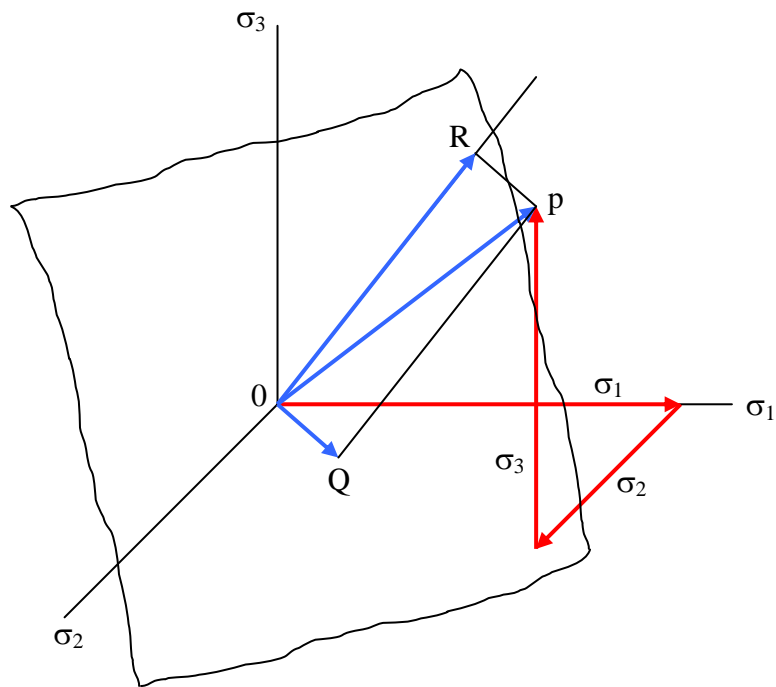


Рисунок 4.6 – Зображення напруженого стану в просторі головних напружень

Оскільки

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + s_2, \quad \sigma_3 = \sigma_0 + s_3,$$

де s_1, s_2, s_3 – головні напруження девіатора s_{ij} , маємо

$$\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{OQ}.$$

В цьому виразі

$$\overline{OR} = \sigma_0 (\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3);$$

$$\overline{OQ} = s_1 \bar{i}_1 + s_2 \bar{i}_2 + s_3 \bar{i}_3.$$

Оскільки

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad (4.24)$$

вектор \overline{OQ} лежить в площині, що проходить через початок координат і рівнонахилений до осей головних напружень, рівняння якої

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Цю площину називають девіаторною, оскільки будь-який вектор, що лежить в ній, характеризує девіатор якогось напруженого стану. Проекції осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на девіаторну площину позначимо відповідно через $1'2'3'$ (рис. 4.7). Очевидно, що вони складають між собою кути 120° . Вектор \overline{OR} , проекції якого на вісі координат однакові, направлений по нормалі v (рис. 4.6) до девіаторної площини. Направляючі косинуси цієї нормалі дорівнюють $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а одиничний

вектор її $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3)$, і тому

$$\overline{OR} = \sigma_0 \sqrt{3} \bar{n}.$$

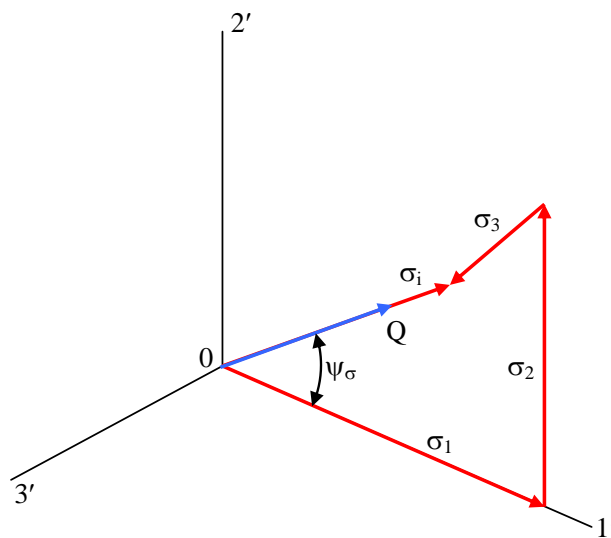


Рисунок 4.7 – Проекції осей σ_1, σ_2 і σ_3 на девіаторну площину і діаграма Марциняка для напружень

Модуль вектора OQ:

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

Підвівши рівність (4.24) до квадрату, отримаємо

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0,$$

Звідки

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = -2(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1).$$

Отже, згідно формулі (4.13)

$$I_2(D_\sigma) = \frac{|\overline{OQ}|^2}{2}$$

і тому

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} |\overline{OQ}|. \quad (4.25)$$

Надаї показав, що інтенсивність напружень пропорційна так званому октаедричному дотичному напруженню, тобто дотичному напруженню в площадці, рівнонахиленій до трьох головних осей – октаедричній площадці.

Величина останнього

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

В. В. Новожилов встановив, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із середнього значення квадратів дотичних напружень в точці тіла. Для того щоб пояснити це положення, опишемо навколо точки тіла сферу радіуса r . Нормаль ν до довільної площадки перетинає поверхню сфери в певні точки. Виділимо навколо неї елемент $d\Omega$ поверхні сфери. Дотичне напруження в цій площадці позначимо τ_ν . Добуток $\tau_\nu d\Omega$ є елементарною дотичною силою по площадці $d\Omega$. З метою виключення знаку дотичного напруження розглянемо замість величини $\tau_\nu d\Omega$ вираз $\tau_\nu^2 d\Omega$. Визначимо середнє значення квадратів дотичних напружень τ_c^2 наступним чином:

$$\tau_c^2 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tau_\nu^2 d\Omega. \quad (4.26)$$

Ця величина залежить від форми виділеного елемента і від його орієнтації по відношенню до головних осей тензора напружень. Вибір сфери пояснюється тим, що тільки на сфері (з огляду її повної симетрії) буде в рівній мірі представлена вся множина площадок, що проходять через точку.

В результаті розрахунку інтегралу в співвідношенні (4.26) можна встановити, що

$$\tau_c^2 = \frac{1}{15} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

Зіставляючи цей вираз із співвідношенням (4.21), заключаємо, що сформульоване вище положення доведено.

С. Д. Пономарьовим показано, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із мінімального середньквдратичного ухилення головних напружень заданого напруженого стану $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, від напружень σ певного рівноважного напруженого стану. Позначимо цю величину через Δ :

$$\Delta = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right] \quad (4.27)$$

Визначимо напруження σ рівноосного напруженого стану таким чином, щоб ухилення Δ мало мінімальне значення. Такий рівноосний напружений стан будемо називати «найближчим» до заданого.

Для визначення напружень «найближчого» до заданого рівноосного напруженого стану прирівняємо нулю похідну виразу (4.25) по σ :

$$\frac{d\Delta}{d\sigma} = -\frac{2}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma) + (\sigma_2 - \sigma) + (\sigma_3 - \sigma) \right] = 0$$

звідки

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Оскільки друга похідна виразу (4.27) по σ додатна, знайдене значення $\sigma = \sigma_0$ відповідає мінімуму виразу (4.27).

Підстановка знайденого значення σ в вираз (4.27) приводить до наступної величини мінімального середньоквадратичного ухилення:

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (4.28)$$

Зіставляючи вирази (4.28) і (4.21), заключаємо, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із мінімального середньоквадратичного ухилення.

В роботі В. М. Макушина відмічено, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із суми площ трьох окружностей, що обмежують кругову діаграму.

4.6. Геометричне зображення напруженого стану

Геометричним уявленням напруженого стану в точці тіла може слугувати так званий еліпсоїд напружень. Напівосями його є головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 (рис.4.8). Поверхня еліпсоїда є геометричним місцем кінців векторів повних напружень в різних площадках, які проходять через точку, що розглядається. Із еліпсоїду напружень випливає екстремальність головних напружень, тобто одно із головних напружень є найбільшим, а інше найменшим із всіх нормальних напружень на площадках, які проходять через точку, що розглядається.

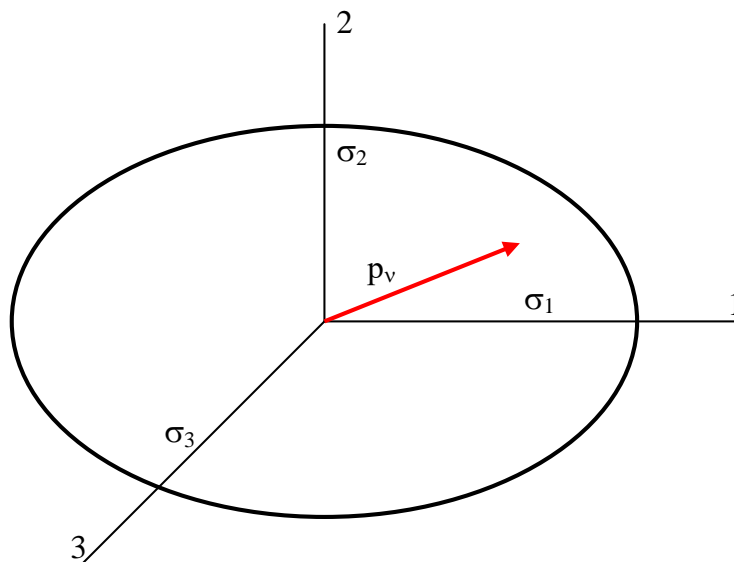


Рисунок 4.8 – Еліпсоїд напружень

В окремому випадку усестороннього рівного розтягу або стиску (рис. 4.5, б) еліпсоїд напружень перетворюються в кулю. Звідси і назва тензору напружень для такого напруженого стану – шаровий тензор.

Еліпсоїд напружень є просторовим геометричним уявленням напруженого стану. На відміну від нього кругова діаграма напружень, або діаграма Мора, є плоске геометричне уявлення напруженого стану.

Кругова діаграма напружень складається із трьох напівкол, діаметрами яких є різниці головних напружень (рис. 4.9). Координати точок, що лежать в

заштриховані області між напівколами, є нормальним і дотичним напруженням в довільно орієнтованих площадках, а координати точок на напівколах I, II і III (рис. 4.9) дорівнюють нормальному і дотичному напруженням у зв'язках площадок I, II і III (рис. 4.10), що проходять через головні вісі 1, 2 і 3. Із кругової діаграми напружень, так як і з еліпсоїду напружень, випливає екстремальність головних напружень. Із кругової діаграми напружень встановлюємо також, що екстремальні значення дотичних напружень в серіях площадок, які проходять через головні вісі 1, 2 і 3 рівні відповідно:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4.29)$$

Ці екстремальні значення дотичних напружень називають *головними дотичними напруженнями*. Площинки, в яких виникають головні дотичні напруження, ділять навпіл прямі кути між головними площадками. Оскільки раніше було прийнято, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = |\tau_2| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.30)$$

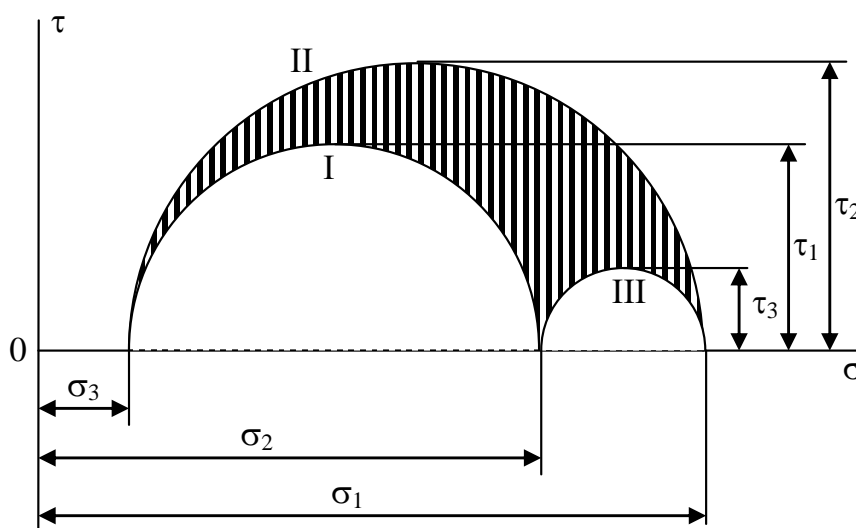


Рисунок 4.9 – Кругова діаграма напружень

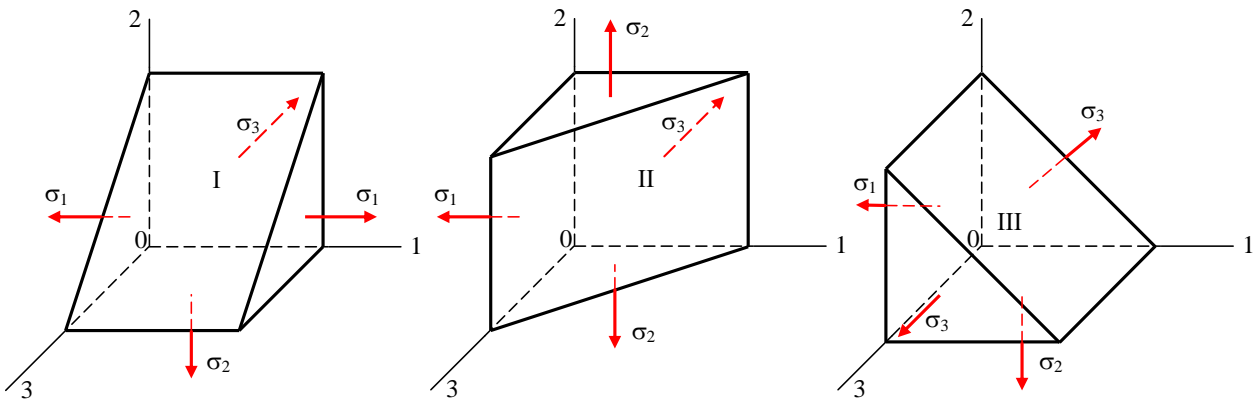


Рисунок 4.10 – Площинки, паралельні головним осям

У випадку рівновісного розтягу або стиску (див. рис. 4.5, б) всі три напівкола кругової діаграми стягуються в точку (рис. 4.11). Це означає, що для такого напруженого стану у всіх площадках, що проходять через початкову точку, дотичні напруження дорівнюють нулю, тобто всі площадки є головними. Як буде встановлено нижче, утворення пластичних деформацій пов'язано з виникненням зсувів і, отже, при наявності дотичних напружень. Тому природно, що, як відмічалось вище, при рівновісному розтягу або стиску пластичні деформації не виникають.

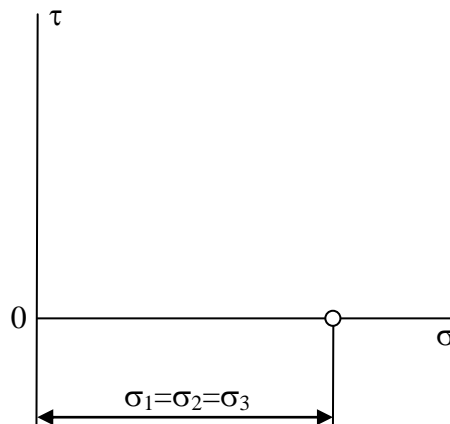


Рисунок 4.11 – Кругова діаграма напружень
для трьохосного рівного розтягу

Розглянемо параметр, що характеризує з точністю до рівновісного розтягу або стиску вид напруженого стану. Він пов'язаний з головними напруженнями наступною залежністю:

$$\chi_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (4.31)$$

Цей параметр був вперше введений в експериментальній роботі Лоде, виконані під керівництвом Надаї, і тому його називають параметром Надаї-Лоде для напружень. Із формули (4.31) випливає, що при накладанні на напружений стан рівноосного розтягу або стиску параметр Надаї-Лоде не змінюється.

Згідно формули (4.31) для одноосного розтягу ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) $\chi_{\sigma} = -1$, для одноосного стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) $\chi_{\sigma} = 1$, для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$) $\chi_{\sigma} = 0$. Кругові діаграми називають подібними, якщо параметри Надаї-Лоде однакові.

4.7. Деформований стан в точці тіла

Припустимо, що певна точка М (рис. 4.12) тіла в результаті його деформації переміщується в положення М₁.

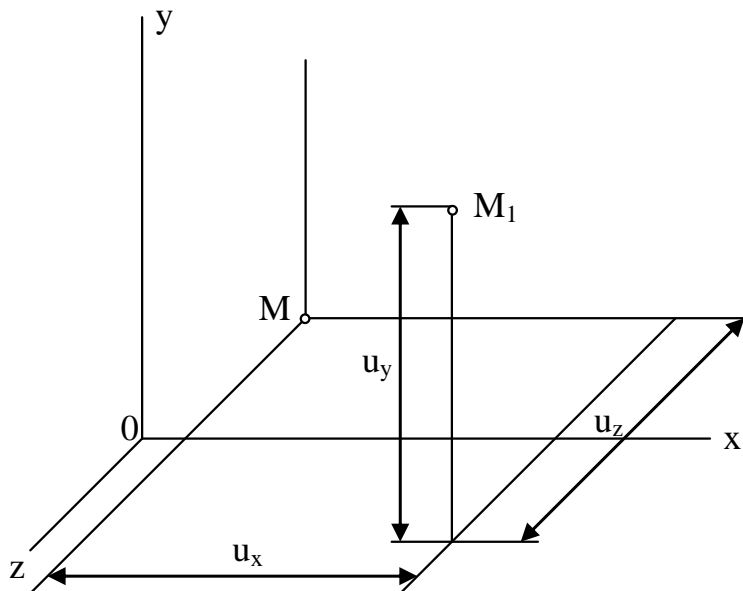


Рисунок 4.12 - Переміщення точки тіла в результаті деформації

Позначимо проекції переміщення точки М на вісі координат через u_x , u_y і u_z . У випадку, коли компоненти деформацій малі порівняно з одиницею, а кути повороту малі настільки, що квадратами і добутками їх порівняно з компонентами деформації можна знехтувати, останні пов'язані з компонентами переміщення лінійними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

В подальшому, якщо не буде обумовлено, будемо вважати, що компоненти деформацій малі порівняно з одиницею, а компоненти переміщення малі порівняно з основними розмірами тіла.

В курсах теорії пружності доводиться, що при повороті прямокутних осей координат компоненти деформації змінюються так і компоненти напруження. Співставлення відповідних формул для компонентів деформації і напруження показує, що перші можна отримати із других заміною компонентів напруження σ і τ компонентами деформації ε і $\frac{\gamma}{2}$ з відповідними індексами.

Шість компонентів деформації ε_x , ε_y , ε_z , $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\frac{\gamma_{zx}}{2}$ утворюють тензор деформації:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

При використанні тензорної символіки загальний компонент тензора деформації має вид ε_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), причому $\varepsilon_{11}=\varepsilon_x$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon_y$, $\varepsilon_{33}=\varepsilon_z$, $\varepsilon_{12}=\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\varepsilon_{23}=\frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\varepsilon_{31}=\frac{\gamma_{zx}}{2}$.

Залежності компонентів деформації від компонентів переміщення (4.32) в скороченому запису мають вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.34)$$

4.8. Умови сумісності деформацій

Із залежностей (4.32) витікає, що шість компонентів деформації виражаються через частинні похідні від трьох компонентів переміщення по координатам x , y і z . Отже, вони не є незалежними функціями цих координат. Між ними повинні існувати залежності, які називають умовами сумісності деформацій.

Пояснимо висловлене положення. Уявимо собі деформуємо тіло ніби складеним із елементарних паралелепіпедів. Якщо тепер кожен паралелепіпед піддати довільній деформації так, що компоненти деформації не будуть між собою пов'язані, а потім намагатися скласти деформовані елементи, то це виявиться неможливим. Між певними елементами утворяться зазори, для інших

елементів не буде місця, і деформовані елементи в цьому випадку буде неможливо об'єднати в безперервне тіло.

Для того щоб отримати умови сумісності деформацій, необхідно з рівнянь (4.32) виключити компоненти переміщення u_x , u_y і u_z . Опустивши перетворення, приведені в курсах теорії пружності, маємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Ці співвідношення є умовами сумісності деформацій. В скороченому тензорному записі вони мають вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

4.9. Розкладення тензора деформацій

Аналогічно загальному випадку напруженого стану загальний випадок деформованого стану, що характеризується тензором деформацій T_ε (4.33), можна представити у вигляді суми двох деформованих станів.

Перший деформований стан характеризується шаровим тензором

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix},$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}, \quad (4.36)$$

а друге девіатором

$$D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{Bmatrix},$$

причому

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x - \varepsilon_0; & e_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ e_y &= \varepsilon_y - \varepsilon_0; & e_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ e_z &= \varepsilon_z - \varepsilon_0; & e_{zx} &= \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

В скороченому тензорному запису компоненти девіатора деформацій можна записати у виді

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0,$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Таким чином,

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon.$$

Із формули (2.6) заключаємо, що

$$e_x + e_y + e_z = 0, \quad (4.38)$$

тобто в другому деформованому стані зміна об'єму дорівнює нулю.

Таким чином, в першому деформованому стані змінюється об'єм (форма не змінюється), а в другому – форма (зміна об'єму дорівнює нулю), в той час як в початковому деформованому стані змінюється як об'єм, так і форма.

Виконаний розділ деформованого стану має певний фізичний зміст, оскільки виникнення пластичних деформацій в матеріалі пов'язано з утворенням зсувів і, отже, зі зміною форми елементарного об'єму. При усесторонніх рівних розтягах або стисках пластичні деформації не виникають.

Девіатор деформацій показує, наскільки досліджуваний деформований стан ухиляється від усестороннього рівного розтягу з головними лінійними деформаціями, рівними середньому арифметичному лінійних деформацій початкового деформованого стану.

4.10. Головні вісі і головні деформації

В кожні точці деформованого тіла існують три взаємно перпендикулярні вісі, для яких компоненти кутової деформації дорівнюють нулю і, отже, кут між цими осями при деформації не змінюється. Ці вісі називають *головними осями деформації* і позначають цифрами 1, 2, 3. Лінійні деформації в напрямку цих осей називають *головними лінійними деформаціями* і позначають: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Головні лінійні деформації є коренями кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (4.39)$$

Оскільки головні деформації не можуть залежати від вибору осей координат, то коефіцієнти кубічного рівняння також не змінюються при

повороті осей координат, тобто є інваріантами. Їх називають відповідно першим, другим і третім інваріантами тензора деформацій і визначають наступним чином:

$$\begin{aligned}
 I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\
 I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{zx}^2}{4}; \\
 I_3(T_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}).
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Очевидно, що вирази інваріантів тензора деформацій через головні деформації мають вид:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\
 I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\
 I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.
 \end{aligned} \right\} \tag{4.41}$$

Отримаємо тепер другий і третій інваріанти девіатора деформацій. [Перший інваріант девіатора деформацій згідно формули (4.38) дорівнює нулю]. Для цього підставимо в формули (4.40) компоненти девіатора деформацій (4.37), використовуючи при цьому співвідношення (4.36). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
 I_2(D_\varepsilon) &= -e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 = \\
 &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right];
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
I_3(D_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_z \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \left[2(\varepsilon_x^3 + \varepsilon_y^3 + \varepsilon_z^3) - \right. \\
&- 3(\varepsilon_x^2 \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y^2 + \varepsilon_y \varepsilon_z^2 + \varepsilon_z \varepsilon_x^2) + 12\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \\
&+ \frac{9}{4} \varepsilon_x (\gamma_{xy}^2 - 2\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) + \frac{9}{4} \varepsilon_y (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 - 2\gamma_{zx}^2) + \\
&\left. + \frac{9}{4} \varepsilon_z (-2\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) + \frac{27}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \right].
\end{aligned} \tag{4.43}$$

4.11. Інтенсивність деформацій

По аналогії з інтенсивністю напружень *інтенсивністю деформацій* називають величину, пропорційну квадратному кореню із другого інваріанта девіатора деформацій. В залежності від прийнятого коефіцієнту пропорційності розрізняють поняття інтенсивності лінійних деформацій або просто інтенсивності деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} I_2(D_\varepsilon)} \tag{4.43}$$

і інтенсивності кутових деформацій

$$\Gamma = \sqrt{4I_2(D_\varepsilon)}. \tag{4.44}$$

Зіставляючи вирази (4.43) і (4.44), заключаємо, що

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}. \tag{4.45}$$

Підставимо в формулу (4.43) співвідношення (4.41). Тоді отримаємо

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (4.46)$$

Скорочений запис інтенсивності деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}. \quad (4.47)$$

Залежність інтенсивності деформацій від головних лінійних деформацій має вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.48)$$

Для окремого випадку одноосного розтягу ізотропного матеріалу ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon - 3\varepsilon_0}{2}$) по формулі (4.48) отримаємо

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (4.49)$$

Для окремого випадку зсуву ізотропного матеріалу ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) із формули (4.46) маємо

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}. \quad (4.50)$$

Із формул (4.45) і (4.50) витікає, що інтенсивність кутових деформацій Γ співпадає з величиною найбільшої кутової деформації при чистому зсуві

$$\Gamma = \gamma.$$

Аналогічно формулі (4.46) інтенсивність пластичних деформацій визначається виразом

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2} [(\gamma_{xy}^p)^2 + (\gamma_{yz}^p)^2 + (\gamma_{zx}^p)^2]}. \quad (4.51)$$

або в скороченому тензорному записі

$$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}. \quad (4.52)$$

Так як і в теорії напружень, можна довести, що інтенсивність деформацій пропорційна квадратному кореню із мінімального середньоквадратичного ухилення деформованого стану, що розглядається, від найближчого до нього усестороннього рівного розтягу або стиску.

Можна також довести, що середня лінійна деформація дорівнює лінійні деформації в напрямку, який складає рівні кути з трьома головними осями, а інтенсивність деформацій пропорційна максимальні кутові деформації між цим напрямком і напрямком, перпендикулярним до нього:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Цю величину називають октаедричною кутовою деформацією.

4.12. Геометричне зображення деформованого стану

Продовжуючи розвивати аналогію між деформованим і напруженим станами, можна заключити, що геометричним уявленням деформованого стану

в точці тіла в просторі є еліпсоїд деформації, а на площині – кругова діаграма деформацій (рис. 2.2).

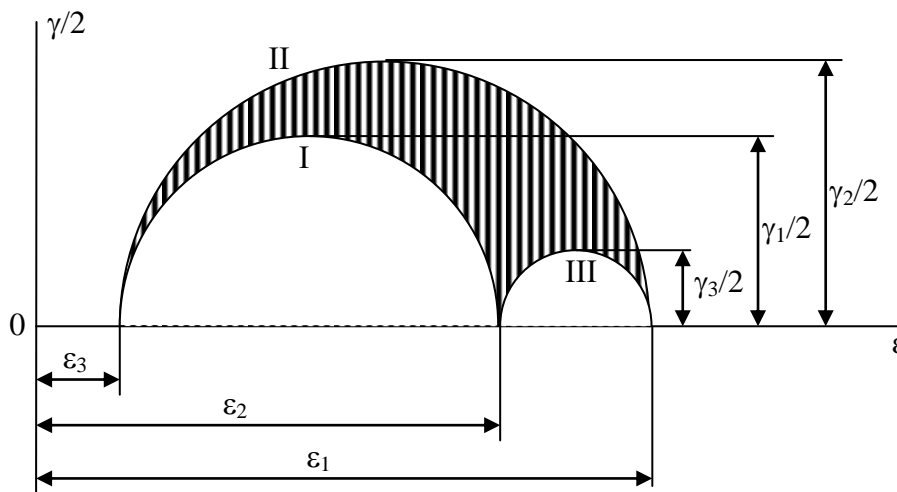


Рисунок 4.13 – Кругова діаграма деформацій

В останньому випадку по вісі абсцис відкладають лінійні деформації, а по вісі ординат – половини кутових деформацій. Координати точок, що лежать на напівколах I, II, III, рівні лінійним деформаціям і половинам кутових деформацій по напрямкам, які лежать в головних площинах 23, 31 і 12 відповідно.

Будь яка із точок, що лежать всередині області, обмеженої трьома колами діаграми, своїми координатами визначають лінійну і половину кутової деформації в напрямках, які не лежать в головних площинах.

Із кругової діаграми витікає, що одна із головних лінійних деформацій є найбільшою, а інша – найменшою із всіх лінійних деформацій біля точки, що досліджується. Далі на підставі кругової діаграми можна також заключити, що найбільші кутові деформації мають місце для напрямків, які лежать в головних площинах і складають кут 45^0 з головними осями.

Ці найбільші кутові деформації, які називаються *головними кутовими деформаціями*, дорівнюють різниці головних лінійних деформацій:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (4.53)$$

По аналогії із відповідною величиною для напружень параметр Надаї-Лоде для деформацій має вид

$$\chi_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1 = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (4.54)$$

він характеризує вид деформованого стану з точністю до рівноосного розтягу або стиску.

Згідно формули (4.54) для одноосного розтягу ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) $\chi_\varepsilon = -1$, для одноосного стиску ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) $\chi_\varepsilon = 1$, для чистого зсуву ($\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = 0$) $\chi_\varepsilon = 0$.

Зіставляючи ці величини параметрів Надаї-Лоде по деформаціям з відповідними величинами параметрів Надаї-Лоде по напруженням заключаємо, що вони однакові, тобто кругові діаграми напружень і деформацій для цих напружених станів подібні.

4.13. Прирошення деформацій

Припустимо, що під час нескінченно малого проміжку часу dt компоненти переміщення певної точки тіла u_i зростають на

$$du_i = v_i dt, \quad (4.55)$$

де v_i – компоненти швидкості переміщення точки.

Розрахуємо нескінченно малі природження компонент деформацій $d\varepsilon_{ij}$.

Отримаємо

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j) \right]. \quad (4.56)$$

Ці величини утворюють тензор нескінченно малих прирощень деформацій $d\varepsilon_{ij}$ або

$$T_{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{ccc} d\varepsilon_x & \frac{d\gamma_{xy}}{2} & \frac{d\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{d\gamma_{xy}}{2} & d\varepsilon_y & \frac{d\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{d\gamma_{zx}}{2} & \frac{d\gamma_{yz}}{2} & d\varepsilon_z \end{array} \right\}. \quad (4.57)$$

Аналогічно тому, як це було зроблено для деформацій, тепер можна визначити інтенсивність прирощень деформацій

$$\overline{d\varepsilon_i} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)}. \quad (4.58)$$

або інтенсивність прирощень пластичних деформацій

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2} \left[(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\gamma_{yz}^p)^2 + (d\gamma_{zx}^p)^2 \right]} \quad (4.59)$$

В скороченому тензорному запису

$$\overline{d\varepsilon_i} = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij} de_{ij}}; \quad \overline{d\varepsilon_i^p} = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij}^p de_{ij}^p}. \quad (4.60)$$

Інтенсивність прирощень деформацій $\overline{d\varepsilon_i}$ не дорівнює прирощенню інтенсивності $d\varepsilon_i$, чим і пояснюється введення rischi в позначення для інтенсивності прирощення деформацій.

Як і раніше, можна побудувати кругову діаграму для прирощень деформацій, а також визначити параметр Надаї-Люде

$$\chi_{d\varepsilon} = 2 \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} - 1 \quad (4.61)$$

Компоненти прирощення деформацій можна виразити через *кут виду прирощення деформацій* $\psi_{d\varepsilon}$ і дати графічну інтерпретацію у вигляді діаграми Мора, зірки Пелчинського або діаграми Марциняка для прирощень деформацій.

В формулах (4.56) прирощення компонентів деформацій розраховують по відношенню до поточного (миттєвого) стану. В окремому випадку одноосного однорідного розтягу стержня прирощення осевої деформації

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$

де l – поточна довжина стержня; dl – нескінченно мала її зміна.

Сумування приводить до так званої логарифмічної деформації:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (4.62)$$

де l_0 – довжина стержня до деформації; Δl – видовження, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – звичайна деформація стержня.

На рис. 4.14 представлений графік залежності (4.62), з якого витікає, що при $\varepsilon < 20\%$ різниця між логарифмічною і звичайною деформаціями незначна. При $\varepsilon = 20\%$ вона складає 10%.

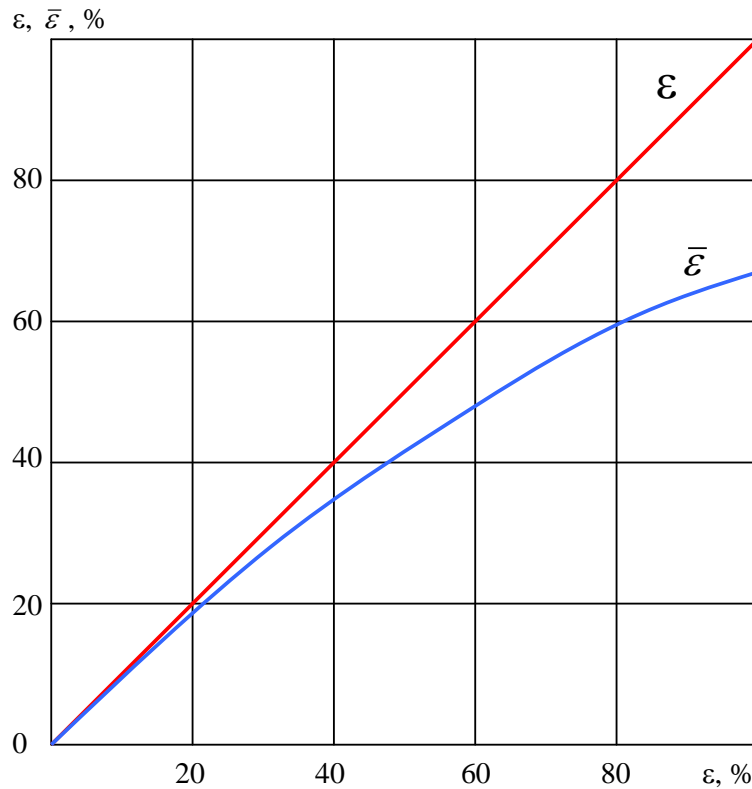


Рисунок 4.14 – Графік залежності логарифмічної деформації від деформації

Оскільки значення звичайної деформації, при якій утворюється шийка, як правило, не перевищує 10-15%, до утворення шийки логарифмічну деформацію наближено можна вважати рівною звичайній.

В загальному випадку інтеграли $\int d\epsilon_{ij}$ можна розрахувати, якщо відомий шлях деформування, тобто якщо відомі компоненти прирощень деформацій в функції певного параметру, що характеризує процес деформування. Якщо головні вісі деформації при деформуванні не обертаються, то ці інтеграли дорівнюють логарифмічним деформаціям.

4.14. Швидкості деформацій

Підставивши вирази (4.55) у співвідношення (4.56), приходимо до висновку, що компоненти нескінченно малих прирощень деформацій мають

спільний множник dt . Розділивши їх на цей множник, отримаємо компоненти швидкостей деформацій ξ_{ij} , пов'язані з компонентами швидкості переміщення v_i співвідношеннями

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]. \quad (4.63)$$

Ці величини утворюють тензор швидкостей деформацій ξ_{ij} або

$$T_\xi = \begin{Bmatrix} \xi_x & \frac{\eta_{xy}}{2} & \frac{\eta_{zx}}{2} \\ \frac{\eta_{xy}}{2} & \xi_y & \frac{\eta_{yz}}{2} \\ \frac{\eta_{zx}}{2} & \frac{\eta_{yz}}{2} & \xi_z \end{Bmatrix}. \quad (4.64)$$

По аналогії з інтенсивностями деформацій і прирощень деформацій можна визначити інтенсивність швидкостей деформацій

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)}. \quad (4.65)$$

або в скороченому тензорному записі

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{ij} - \delta_{ij} \xi_0) (\xi_{ij} - \delta_{ij} \xi_0)}.$$

Якщо $\xi_0=0$, то

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} \quad (4.66)$$

Далі, так як і раніше, можна побудувати кругову діаграму для швидкостей деформацій, визначити параметр Надаї-Лоде

$$\chi_{\xi} = 2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} - 1, \quad (4.67)$$

виразити компоненти девіатора швидкостей деформацій через *кут виду швидкостей деформацій* ψ_{ξ} і дати графічну інтерпретацію у вигляді діаграми Мора, зірки Пелчинського або діаграми Марциняка для швидкостей деформацій.

Запитання для самоперевірки

1. Які напруги виникають в похилих перерізах бруса при розтязі та стискові?
2. В яких перерізах виникають найбільші нормальні та дотичні напруги при розтязі та стискові?
3. Чому дорівнює сума нормальних напруг в двох взаємно перпендикулярних перерізах, що розтягуються?
4. В чому суть закону парності дотичних напруг?
5. Які напруги називаються головними?
6. Який напружений стан матеріалу називається лінійним, плоским, об'ємним?

5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

5.1. Статичні моменти площі. Центр ваги площі

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз бруса), яка пов'язана з координатними осями Oz і Oy (рис. 5.1). Виділимо елемент площі dA з координатами z, y . По аналогії з виразом для моменту сили відносно будь-якої осі можна скласти вираз і для моменту площі, який називається *статичним моментом*. Так, добуток елемента площі dA на відстань y від осі Oz

$$dS_z = ydA \quad (5.1)$$

називається статичним моментом елемента площі відносно осі Oz . Аналогічно

$$dS_y = zdA \quad (5.2)$$

називається статичним моментом елемента площі відносно осі Oy .

Просумувавши такі добутки по всій площі фігури, отримуємо відповідно статичні моменти відносно осей z і y

$$S_z = \int_A ydA \quad (5.3)$$

$$S_y = \int_A zdA \quad (5.4)$$

Статичні моменти вимірюються в одиницях довжини в кубі (наприклад, см^3).

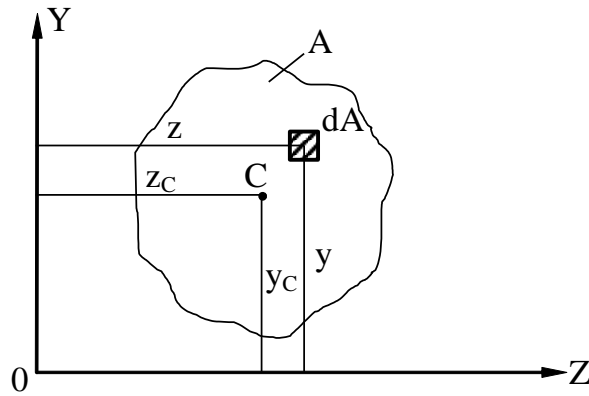


Рисунок 5.1 – Довільна фігура (поперечний переріз бруса)

Припустимо, що z_C , y_C – координати центра ваги фігури. Продовжуючи аналогію з моментами сил, на основі теореми про момент рівнодійної можна написати наступні вирази

$$S_z = A y_C \quad (5.5)$$

$$S_y = A z_C \quad (5.6)$$

де A – площа фігури

Звідси координати центра ваги

$$z_C = \frac{S_y}{A} \quad (5.7)$$

$$y_C = \frac{S_z}{A} \quad (5.8)$$

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини, для кожної з яких відома площа і положення центру ваги. Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини

$$S_z = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + \dots + A_n \cdot y_{Cn} = \sum A_i \cdot y_{Ci} \quad (5.9)$$

$$S_y = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} + \dots + A_n \cdot z_{Cn} = \sum A_i \cdot z_{Ci}, \quad (5.10)$$

По формулах (5.7)–(5.10) знаходимо координати центра ваги складної фігури

$$z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} \quad (5.11)$$

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \quad (5.12)$$

5.2. Моменти інерції плоских фігур

Осьовим моментом інерції площі плоскої фігури називають інтеграл добутків елементарних площ на квадрати їх відстаней від осі, що розглядається. Моменти інерції довільної фігури (рис. 5.2) відносно осей z і y відповідно

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (5.13)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad (5.14)$$

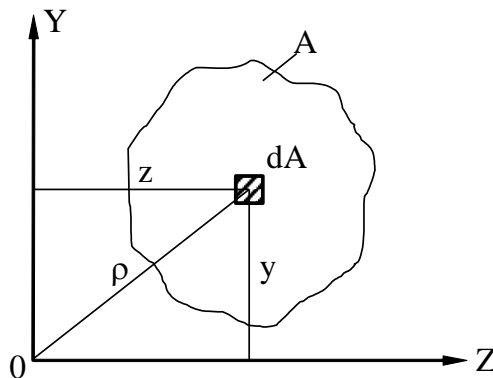


Рисунок 5.2 – Довільна фігура в системі координат

Полярним моментом інерції площі фігури відносно даної точки (полюса 0) називають інтеграл добутків елементарних площ на квадрати їх відстаней від полюса

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (5.15)$$

Якщо через полюс проведена система взаємно перпендикулярних осей z і y , то $\rho^2 = z^2 + y^2$. З виразу (5.15) маємо

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y$$

Відмітимо, що величини осьових і полярних моментів інерції завжди додатні.

Відцентровим моментом інерції називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на їх відстань від координатних осей z і y

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (5.16)$$

В залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатнім або від'ємним, а також рівним нулю. Поступово повертаючи осі можна знайти таке їх положення, при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Такі осі називають *головними осями інерції*. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають *головними центральними осями*.

5.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей z, y

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A zy dA \quad (5.17)$$

Необхідно визначити моменти інерції відносно осей, паралельних центральним (рис. 5.3)

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA \quad (5.18)$$

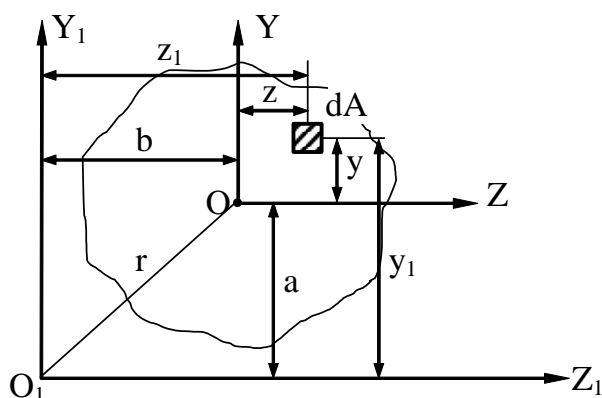


Рисунок 5.3 – Довільне тіло в системі паралельних осей

Координати будь-якої точки в системі координат $z_1 O_1 y_1$ можна виразити через координати в системі координат $z O y$

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a \quad (5.19)$$

Підставляємо ці значення в формули (5.18) і інтегруємо почленно

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA \quad (5.20)$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z+b)^2 dA = \int_A z^2 dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A z dA \quad (5.21)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z+b)(y+a) dA = \int_A zy dA + ab \int_A dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA \quad (5.22)$$

Оскільки інтеграли $\int_A y dA = S_z$ і $\int_A z dA = S_y$ дорівнюють нулю як статичні моменти відносно центральних осей, то формули (5.20), (5.21), (5.22) з урахуванням формул (5.17) приймають вид

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A, \quad (5.23)$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (5.24)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + abA. \quad (5.25)$$

Таким чином:

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями;

Відцентровий момент інерції відносно будь-якої системи прямокутних осей дорівнює відцентровому моменту відносно системи центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях.

5.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції довільної фігури (рис. 5.4) відносно координатних осей z, y

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A zy dA \quad (5.26)$$

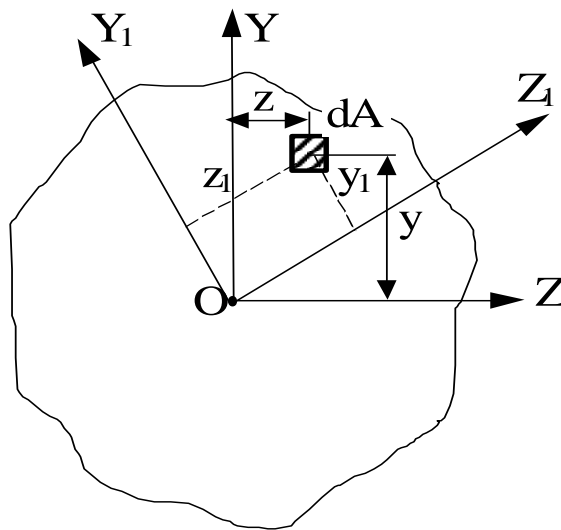


Рисунок 5.4 – Довільна фігура при повороті осей координат

Повернемо осі z, y на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей в цьому напрямку додатнім. Знайдемо тепер моменти інерції перерізу відносно повернутих z_1, y_1

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA \quad (5.27)$$

Координати довільної елементарної площадки в нових осях z_1, y_1 виражаються через координати z, y початкової системи осей наступним чином

$$z_1 = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \quad (5.28)$$

$$y_1 = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Підставимо ці значення у вирази (5.27) і про інтегруємо почленно

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - \\ &- \sin 2\alpha \int_A zy dA \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \\ &+ \sin 2\alpha \int_A zy dA \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} I_{z_1 y_1} &= \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha) dA = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A zy dA + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Враховуючи формули (5.26) знаходимо

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \quad (5.32)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \quad (5.33)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha \quad (5.34)$$

Відмітимо, що формули (5.32)-(5.34), отримані при повороті будь-якої системи прямокутних осей, природно, справедливі і для центральних осей.

Складаючи почленно формули (5.32) і (5.33), знаходимо

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p \quad (5.35)$$

Таким чином, при повороті прямокутних осей сума моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті системи осей на кут $\alpha=90^0$

$$I_{z1}=I_y \quad (5.36)$$

$$I_{y1}=I_z \quad (5.37)$$

$$I_{z1y1}=-I_{zy} \quad (5.38)$$

Найбільше практичне значення мають головні центральні осі, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулю $I_{uv}=0$.

Щоб визначити положення головних центральних осей несиметричної фігури, повернемо довільну початкову систему центральних осей z, y (рис. 5.6) на певний кут α_0 , при якому відцентровий момент інерції стає рівним нулю

$$I_{z1y1}=I_{uv}=0 \quad (5.39)$$

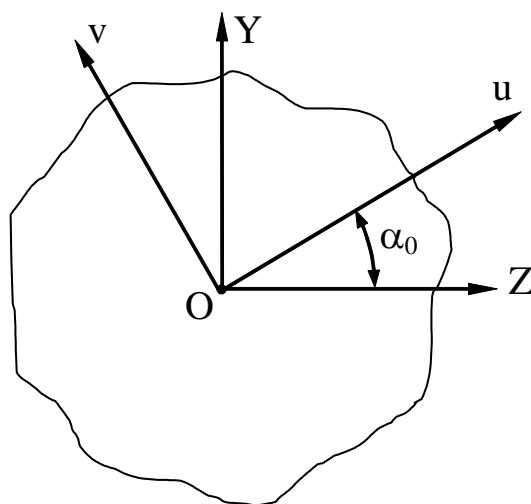


Рисунок 5.6 – Несиметрична фігура при повороті довільної початкової системи центральних осей z, y на певний кут α_0

Тоді із формули (5.34)

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{(I_y - I_z)}{2} \sin 2\alpha_0 = 0 \quad (5.40)$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (5.41)$$

Отримані із формули (5.41) два значення кута α_0 відрізняються один від одного на 90° і дають положення головних осей. Як легко бачити, менший із цих кутів по абсолютній величині не перевищує $\frac{\pi}{4}$. В подальшому будемо користуватися тільки меншим кутом. Проведену під цим кутом (додатнім або від'ємним) головну ось будемо позначати u . Нагадуємо, що від'ємні кути α_0 відкладаються від осі z по ходу годинникової стрілки. На рис. 5.7 – 5.10 приведені певні приклади позначення головних осей u відповідності з вказаним правилом. Початкові осі позначені z і y .

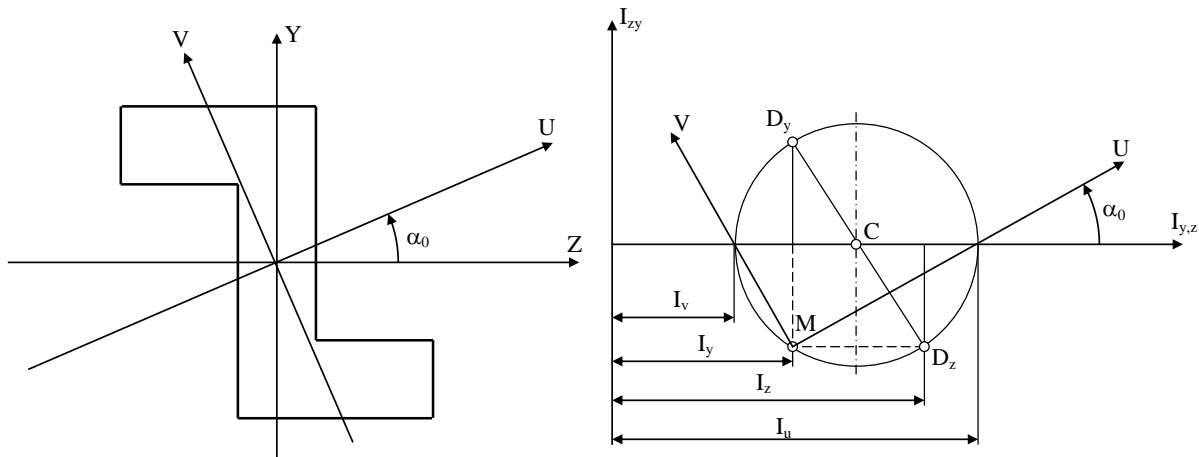


Рисунок 5.7 – Позначення головних осей. $I_z > I_y$, $I_{zy} < 0$, $\alpha_0 > 0$

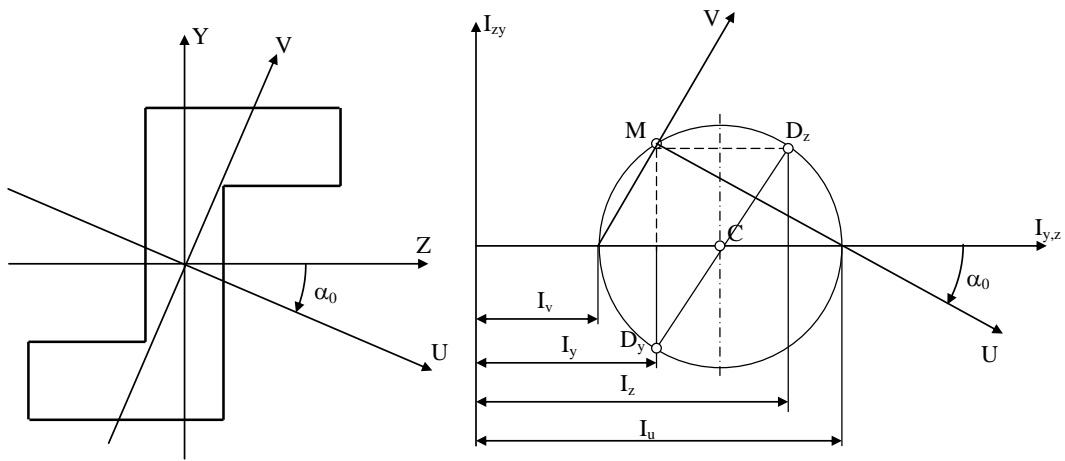


Рисунок 5.8 – Позначення головних осей. $I_z > I_y$, $I_{zy} > 0$, $\alpha_0 < 0$

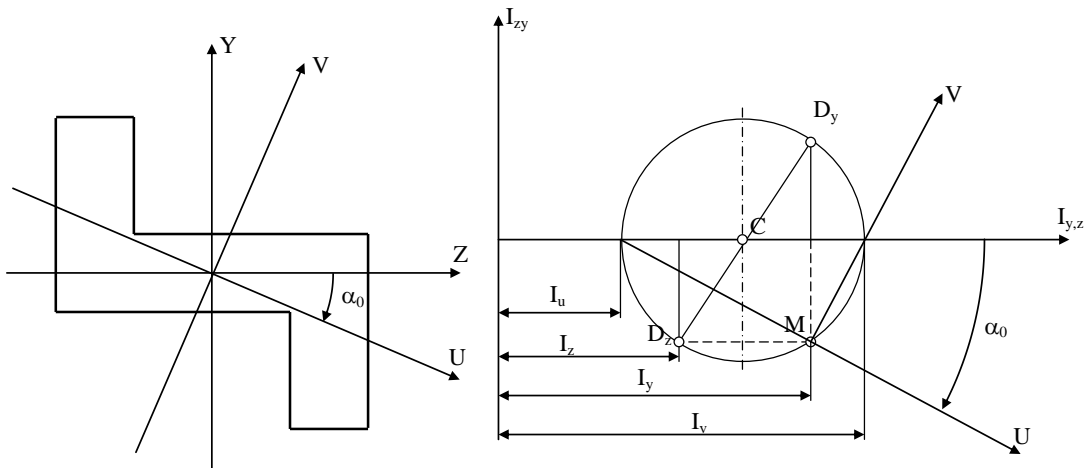


Рисунок 5.9 – Позначення головних осей. $I_z < I_y$, $I_{zy} < 0$, $\alpha_0 < 0$

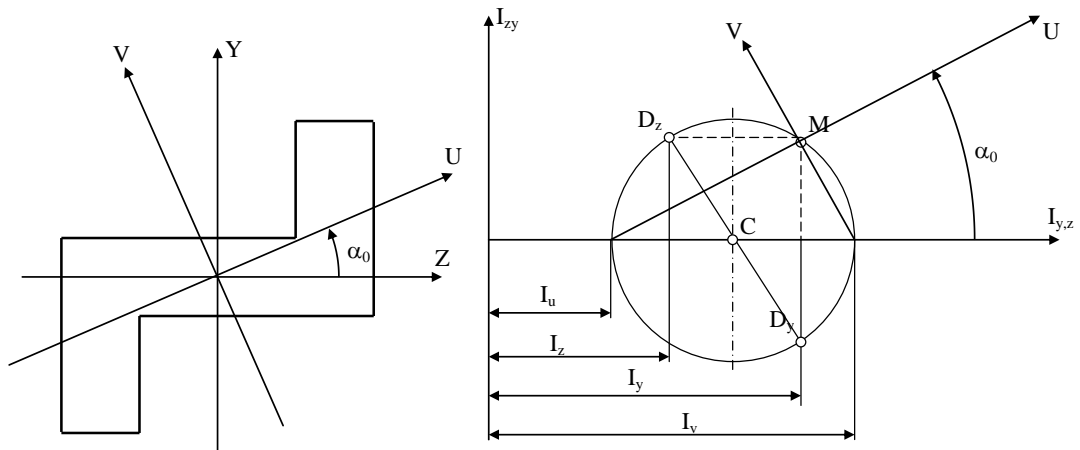


Рисунок 5.10 – Позначення головних осей. $I_z < I_y$, $I_{zy} > 0$, $\alpha_0 > 0$

Значення головних моментів інерції можна отримати із загальних формул (5.32), (5.33) переходу до повернутих осей, прийнявши $\alpha = \alpha_0$

$$I_u = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (5.42)$$

$$I_v = I_z \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (5.43)$$

Перетворимо формули (5.42), (5.43) для головних центральних моментів інерції, склавши вирази для їх суми і різниці. Очевидно, що

$$I_u + I_v = I_z + I_y \quad (5.44)$$

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cos 2\alpha_0 - 2I_{zy} \sin 2\alpha_0 = (I_z - I_y) \frac{4}{\cos 2\alpha_0} \quad (5.45)$$

причому у виразі (5.45) зроблена заміна I_{zy} із формули (5.41)

$$2I_{zy} = (I_y - I_z) \operatorname{tg} 2\alpha_0 \quad (5.46)$$

тепер із формул (5.44) і (5.45) знаходимо більш зручні вирази

$$I_u = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) + (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right] \quad (5.47)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) - (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right] \quad (5.48)$$

Очевидно, що при $I_z > I_y$ момент $I_u > I_v$.

Використовуючи формулу (5.41), можна виключити із виразів (5.47), (5.48) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}} \quad (5.49)$$

В результаті маємо

$$I_u = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (5.50)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (5.51)$$

5.5. Поняття про радіус інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна представити в вигляді добутку площі фігури на квадрат певної величини, яка називається радіусом інерції:

$$I_z = \int_A y^2 dA = A \cdot i_z^2, \quad (5.52)$$

де i_z – радіус інерції відносно осі z .

Із виразу (52) витікає, що

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (5.53)$$

Аналогічно радіус інерції площі перерізу відносно осі y

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (5.54)$$

Головними центральними осями інерції відповідають головні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad (5.55)$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (5.56)$$

Приклад

Для заданого перерізу (рис. 5.11) визначити, користуючись таблицями сортаменту, аналітичним способом положення головних центральних осей і величину головних центральних моментів інерції.

Переріз складається з двутавра №30а і кутника 140×90×10, $a=0.1 \cdot b=0.1 \cdot 145=14.5\text{мм}$.

Відповідно до ДЕСТ 8239-72 (додаток 6) для двутавра №30а: $b=145\text{мм}$, $A_1=49.9\text{см}^2$, $I_{Z1}=7780\text{см}^4$, $I_{Y1}=436\text{см}^4$.

Дані для кутника по сортаменту (додаток 7): $A_2=22.2\text{см}^2$, $I_{Z2}=146\text{см}^4$, $I_{Y2}=444\text{см}^4$, $I_{ZY}=147\text{см}^4$.

Даний переріз креслиться в масштабі (рис. 5.11). Центр ваги визначається в системі допоміжних осей. Відстані від осей Y і Z до центра ваги двутавра C_1

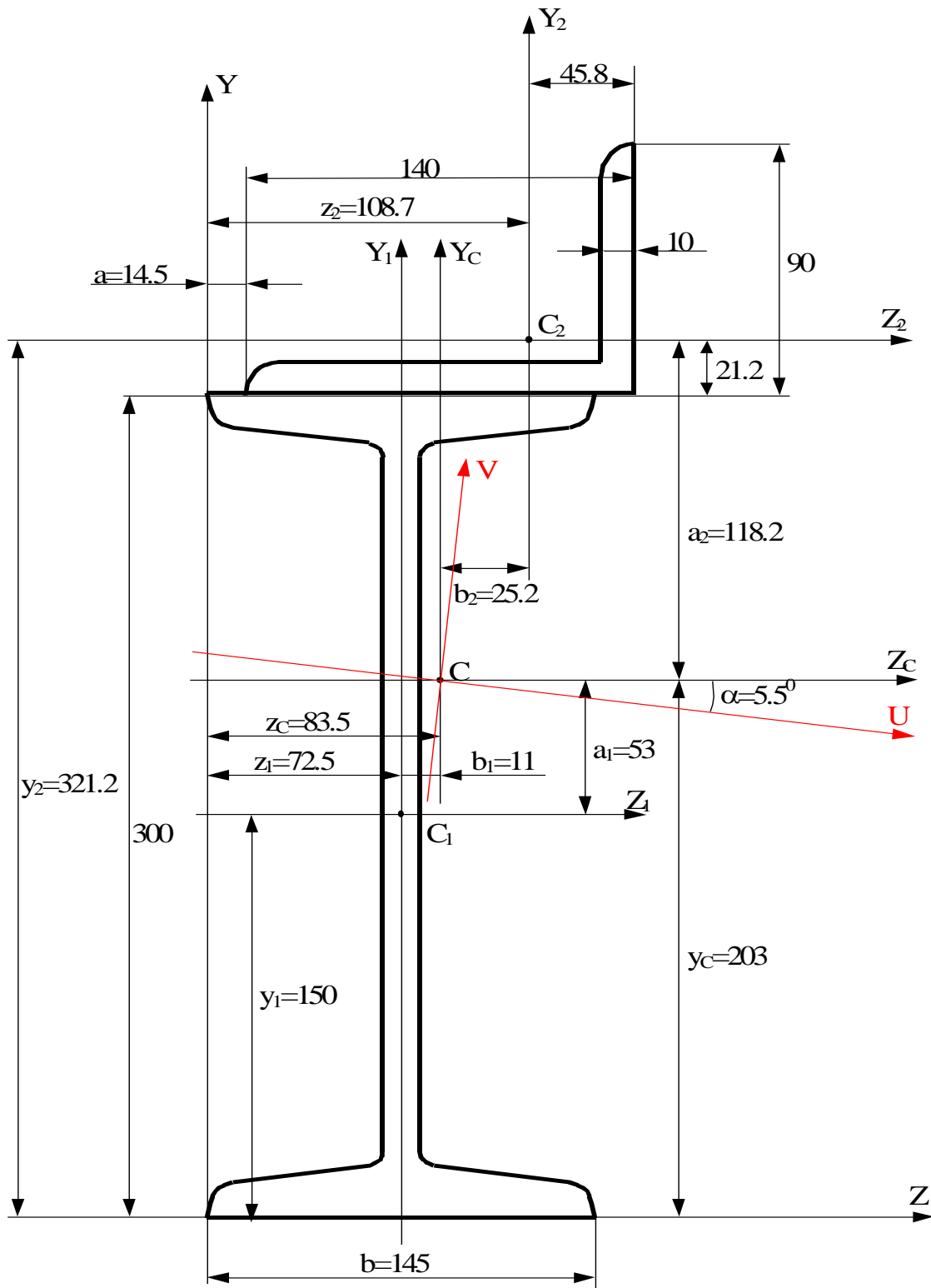


Рисунок 5.11 – Переріз з двутавра №30а і кутника 140×90×10

$$y_1 = \frac{300}{2} = 150 \text{ мм} = 15 \text{ см}; \quad z_1 = \frac{145}{2} = 72.5 \text{ мм} = 7.25 \text{ см}$$

Відстані від цих осей до центра ваги кутника

$$y_2=300+21.2=321.2\text{мм}=32.12\text{см}; z_2=14.5+140-45.8=108.7\text{мм}=10.87\text{см}$$

Координати центра ваги перерізу С

$$y_C = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 49.9 + 32.12 \cdot 22.2}{49.9 + 22.2} = 20.3\text{см} = 203\text{мм};$$

$$z_C = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{7.25 \cdot 49.9 + 10.87 \cdot 22.2}{49.9 + 22.2} = 8.35\text{см} = 83.5\text{мм}$$

Точка С наноситься на креслення. При правильному визначенні її положення точка С лежить на прямій C_1C_2 , яка з'єднує центри ваги двутавра та кутника.

Користуючись формулами переходу до паралельних осей, визначимо моменти інерції перерізу відносно центральних осей Z_C і Y_C .

$$\begin{aligned} I_{ZC} &= I_{Z1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{Z2} + a_2^2 \cdot A_2 = \\ &= 7780 + (-5.3)^2 \cdot 49.9 + 146 + 11.82^2 \cdot 22.2 = 12437\text{см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{YC} = I_{Y1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{Y2} + b_2^2 \cdot A_2 = 436 + (-1.1)^2 \cdot 49.9 + 444 + 2.52^2 \cdot 22.2 = 1081\text{см}^4$$

де $a_1 = y_1 - y_C = 15 - 20.3 = -5.3\text{см} = -53\text{мм},$

$$a_2 = y_2 - y_C = 32.12 - 20.3 = 11.82\text{см} = 118.2\text{мм},$$

$$b_1 = z_1 - z_C = 7.25 - 8.35 = -1.1\text{см} = -11\text{мм},$$

$$b_2 = z_2 - z_C = 10.87 - 8.35 = 2.52\text{см} = 25.2\text{мм}.$$

Відцентровий момент інерції всього перерізу відносно осей Z_C і Y_C .

$$\begin{aligned} I_{ZC YC} &= I_{Z1 Y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + I_{Z2 Y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 = 0 + (-5.3) \cdot (-1.1) \cdot 49.9 + 147 + \\ &+ 11.82 \cdot 2.52 \cdot 22.2 = 1101\text{см}^4 \end{aligned}$$

Якщо осьові моменти інерції мають тільки додатні значення, то центробіжні можуть бути як додатні, так і від'ємні.

Кут нахилу головних осей інерції до центральних осей.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{zcyz}}{I_{yc} - I_{zc}} = \frac{2 \cdot 1101}{1081 - 12437} = -0.194;$$

$$2 \cdot \alpha = -11^{\circ}; \alpha = -5.5^{\circ}$$

Головні моменти інерції перерізу.

$$I_{\max} = I_U = \frac{I_{zc} + I_{yc}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{zc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{zcyz}^2} =$$

$$= \frac{12437 + 1081}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(12437 - 1081)^2 + 4 \cdot 1101^2} = 12532 \text{ см}^4$$

$$I_{\min} = I_V = \frac{I_{zc} + I_{yc}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{zc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{zcyz}^2} =$$

$$= \frac{12437 + 1081}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(12437 - 1081)^2 + 4 \cdot 1101^2} = 983 \text{ см}^4$$

Запитання для самоперевірки

1. Перелічити та дати визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів бруса.
2. Як найбільш раціонально визначити координати центра ваги складної плоскої фігури??
3. Як змінюються моменти інерції перерізу в разі паралельного перенесення осей?
4. Як змінюються моменти інерції перерізу в разі повороту осей?
5. Що розуміють під головними осями інерції?

6. КРУЧЕННЯ

6.1. Основні поняття

Кручення – опір стержня коли в поперечних перерізах стержня від зовнішнього навантаження виникають тільки крутячі моменти (інші внутрішні силові фактори відсутні).

Деформація кручення найбільш розповсюджена в валах. Якщо навантаження на прямолінійний стержень (вал) складається тільки з моментів M_k , площини яких перпендикулярні до осі стержня, то з шести зусиль і моментів в будь-якому перерізі залишається тільки крутний момент $M_{кр}$.

Внутрішній момент $M_{кр}$ виражається через зовнішні M_k : $M_{кр}$ в перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів M_k , розташованих по одну сторону від перерізу. Якщо стержень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх M_k дорівнює нулю. Тому результат буде отримано один і той же, чи будемо при розрахунку $M_{кр}$ брати суму моментів M_k , розташованих зліва чи справа від перерізу.

Стержні, що працюють на кручення, зазвичай називають *валами*. Якщо розглядати кручення валу (рис. 6.1), легко встановити, що під дією крутного моменту, прикладеного до вільного кінця, будь-який перетин на відстані x від защемлення повертається відносно закріпленого перетину на певний кут φ - кут закручування.

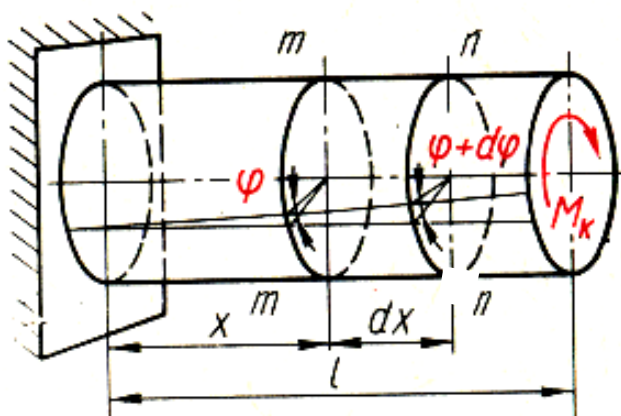


Рисунок 6.1 — Кручення валу

6.2. Напруження при крученні

Для визначення характеру розподілу напружень по перетину на поверхні круглого валу нанесемо сітку, яка складається із ліній, паралельних осі, і ліній, які є паралельними колами (рис. 6.2). Розглянемо деформацію прямокутного елемента нескінченно малої товщини, виділеного на поверхні валу. Розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву і, відповідно, на його гранях діють дотичні напруження (рис. 6.3, 6.4). Кут γ є *кутом зсуву (відносний зсув)*.

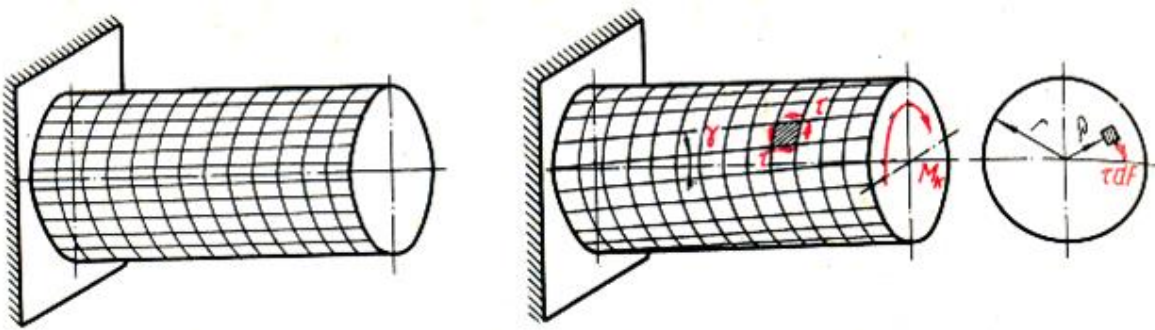


Рисунок 6.2 – Вал з нанесеною сіткою, яка складається із ліній, паралельних осі, і ліній, які є паралельними колами

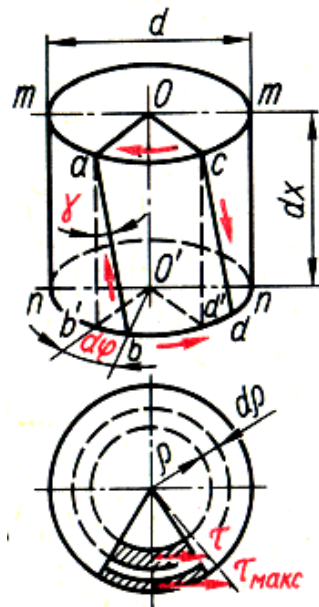


Рисунок 6.3 – Елемент, що перебуває в умовах чистого зсуву

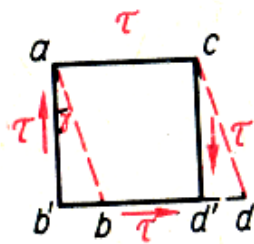


Рисунок 6.4 – Елемент на гранях якого діють дотичні напруження

Відносний кут закручування круглого стержня

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \quad (6.1)$$

де GI_p – жорсткість стержня при крученні, Н·м²,

I_p – полярний момент інерції круглого стержня, який для суцільного стержня діаметром d , виражається формулою $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, а для трубчастого

стержня з внутрішнім діаметром $d_в$, і зовнішнім $d_з$ $I_p = \frac{\pi(d_з^4 - d_в^4)}{32}$

Якщо в межах циліндричної ділянки стержня довжиною l крутні моменти в перетинах не змінюються, то

$$\phi = \theta l = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (6.2)$$

Для визначення дотичного напруження τ в будь-якій точці перетину стержня достатньо в формулу, що встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями $\tau_\rho = G\theta\rho$ підставити вираз для θ по формулі (198). Тоді

$$\tau = \frac{M_x \rho}{I_p} \quad (6.3)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на периферії перетину стержня

$$\tau_{\max} = \frac{M_x r}{I_p} = \frac{M_x}{W_p} \quad (6.4)$$

де $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ - полярний момент опору для суцільного круглого перетину.

Встановивши формулу для визначення максимального дотичного напруження при крученні, можна записати рівняння міцності при крученні

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] \quad (6.5)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні (чистому зсуві).

Крім розрахунку на міцність вали розраховують і на жорсткість, обмежуючи погонні кути закручування певною допустимою величиною $[\theta]$

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{GI_p} \leq [\theta] \quad (6.6)$$

Приклад

Побудувати епюри крутних моментів для вала з насадженими на нього шківками (рис. 6.5), якщо: $M=40\text{кНм}$; $M_1=M$; $M_2=2M$; $M_3=2.5M$; $M_4=1.5M$; $m=100\text{кН}$; $a=0.6\text{м}$

При розрахунках на міцність і жорсткість знак крутного моменту не грає ніякої ролі, але для зручності побудови епюр пропонується вважати крутний момент додатнім, якщо дивлячись в торець відсіченої частини бруса цей момент є направленим за годинниковою стрілкою.

Величина M_0 визначається з умови рівноваги вала, знак приймається по вище приведеному правилу, причому дивитися будемо з правого торця вала. Напрямок обертання M_0 орієнтовно покажемо за годинниковою стрілкою.

$$\sum M=0 \quad M_1+M_0-M_2+ma-M_3+M_4=0,$$

$$M_0 = -M_1 + M_2 - ma + M_3 - M_4 = -40 + 80 - 100 \cdot 0.6 + 100 - 60 = 20 \text{ кНм.}$$

Крутний момент M_0 отримано зі знаком плюс, таким чином напрямок визначили правильно. Якщо M_0 з умови рівноваги виявиться від'ємним, то необхідно змінити його напрямок на протилежний і в подальшому знак мінус не враховувати.

Для визначення величини крутних моментів вал розбивається на ділянки між суміжними шківками, виконуються перерізи на кожній ділянці, одна частина системи відкидається, її дія замінюється $M_{кр}$, величина якого знаходиться з умови рівноваги частини, яка залишилася. Розглянемо переріз 1-1 (рис. 6.5,б). Відкинута права частина, напрямок $M_{кр1}$ необхідно приймати за годинниковою стрілкою, якщо дивитися в торець відсіченої частини вала.

Переріз 1-1

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_{кр1} = 0,$$

$$M_{кр1} = -M_1 = -40 \text{ кНм.}$$

Аналогічно розглядаємо інші перерізи, складаючи рівняння рівноваги для лівих частин вала.

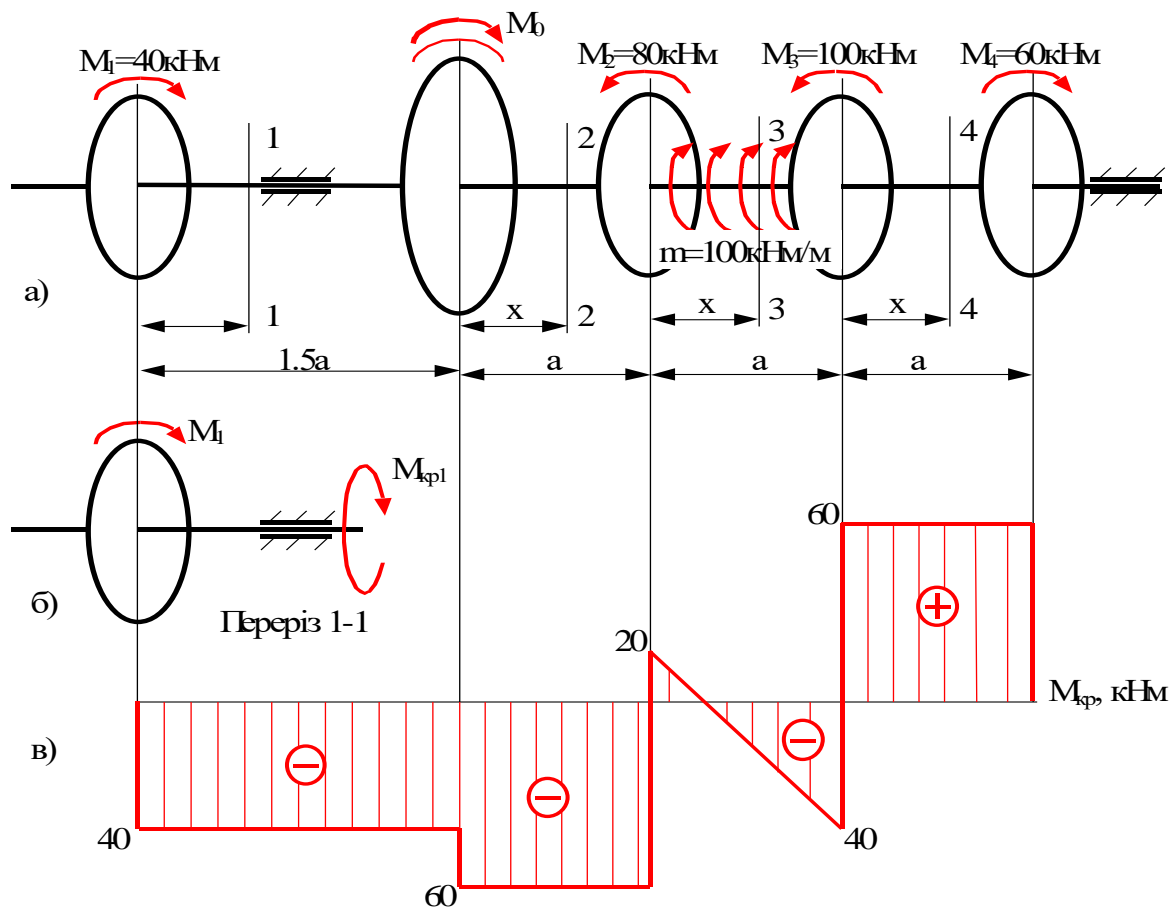


Рисунок 6.5 – Вал з насадженими на нього шківками

Переріз 2-2

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_0 + M_{кр2} = 0,$$

$$M_{кр2} = -M_1 - M_0 = -40 - 20 = -60 \text{ кНм}.$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq a$)

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_0 - M_2 + m \cdot x + M_{кр3} = 0,$$

$$M_{кр3}(x=0) = -M_1 - M_0 + M_2 - m \cdot 0 = -40 - 20 + 80 - 100 \cdot 0 = 20 \text{ кНм},$$

$$M_{кр3}(x=a) = -M_1 - M_0 + M_2 - m \cdot a = -40 - 20 + 80 - 100 \cdot 0.6 = -40 \text{ кНм}.$$

Переріз 4-4

$$\Sigma M=0 \quad M_1+M_0-M_2+m \cdot a-M_3+M_{кр4}=0,$$

$$M_{кр4}=-M_1-M_0+M_2-m \cdot a+M_3=-40-20+80-100 \cdot 0.6+100=60 \text{кНм}.$$

Епюрою крутних моментів називається графік розподілу моментів по довжині вала. В масштабі по горизонталі відкладаються довжина вала в метрах, по вертикалі – крутні моменти в кНм. Вверх відкладаються додатні моменти, вниз - від'ємні (рис. 6.5 в).

Запитання для самоперевірки

1. Чому дорівнює крутний момент в поперечному перерізі бруса?
2. Які напруження виникають в поперечному перерізі бруса при крученні?
3. Який кут називається повним кутом закручування ?
4. Що називається жорсткістю перерізу вала при крученні ?
5. В яких точках перерізу круглого бруса виникають найбільші дотичні напруження ?
6. За яким законом розподіляються дотичні напруження в перерізі круглого бруса при крученні ?
7. В чому суть розрахунку на жорсткість ?
8. Що таке допустимий кут закручування ?

7. ЗГИН

7.1. Основні поняття

Під *згином* розуміється такий вид навантаження, при якому в поперечних перерізах стержня виникають згинаючі моменти. Поряд зі згинаючими моментами при згині в більшості випадків виникають і поперечні зусилля.

Чистий згин – деформація, при якій в поперечних перерізах стержня діє тільки згинаючий момент.

Поперечний згин – деформація, при якій в поперечних перерізах стержня діють одночасно згинаючі моменти і поперечні зусилля.

Якщо зовнішнє навантаження розташоване у площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції цього перерізу (зокрема – вісь симетрії), то балка деформується в цій же площині. Такий згин називають *прямим або плоским*.

На рисунку 7.1 зображений брус, підданий прямому згину. Згин викликається дією сил і моментів, які лежать у силовій площині Π , що проходить через поздовжню вісь балки.

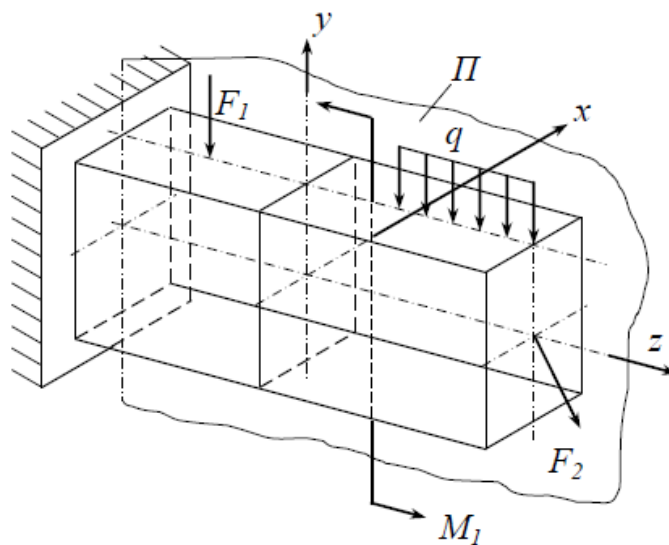


Рисунок 7.1 – Прямий згин бруса

Далі, якщо не обумовлюється особливо, розглядатиметься прямий згин в площині yOz . В умовах згину працюють рейки залізничної колії, хребтові балки вагонів, осі колісних пар, вали зубчастих передач, елементи мостів і мостових перекриттів і т.п.

Стержень, що працює на згин, називають *балкою*.

7.2. Типи опор балок. Типи балок

Конструктивне виготовлення опор балок досить різноманітне. В опорі матеріалів всю конструктивну різноманітність опор зводять до трьох основних типів: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома і защемляюча опори.

Шарнірно рухома опора (рисунок 7.2 *а*) допускає поворот балки відносно опори, і переміщення в одному напрямку (на рисунку 7.2 *а* це напрямок, перпендикулярний опорному стержню). Реакція R такої опори направлена вздовж опорної в'язі (шарнірного опорного стержня) перпендикулярно напрямку допустимих переміщень.

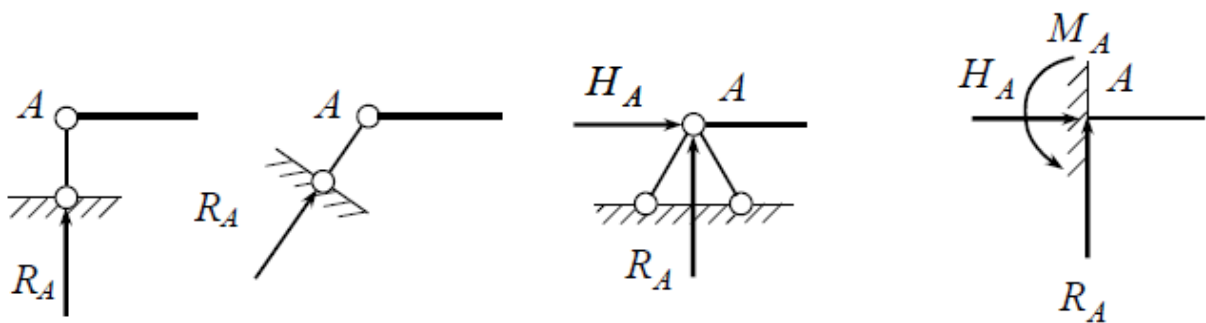


Рисунок 7.2 – Типи опор балок: *а* – шарнірно рухома опора; *б* – шарнірно нерухома опора; *в* – защемляюча опора

Шарнірно нерухома опора (рисунок 7.2 *б*) допускає вільний поворот балки відносно опори, але не допускає ні вертикального, ні горизонтального переміщення. В опорі виникає сила реакції, напрямок якої залежить від

зовнішніх сил, що діють на балку. Для зручності ці визначення її звичайно замінюють проекціями R_A і H_A на осі координат.

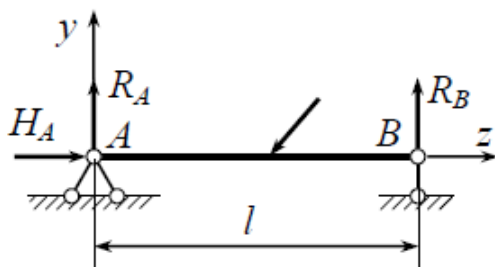
Защемлення (рисунок 7.2 в) не допускає ні повороту ні лінійних переміщень балки. Реакція защемлення складається із сили, яку звичайно замінюють складовими R_A і H_A і моменту M_A .

В залежності від кількості і типу опор, з'єднуючих балки з підставою, виділяють наступні типи балок:

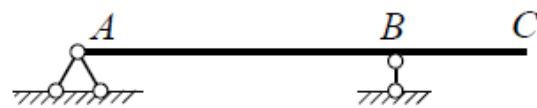
1. Проста (однопрогонова чи двохопорна) балка (рисунок 7.3 а). Балка має одну шарнірно нерухому і одну шарнірно рухому опори.

Відстань l між опорами балки називається *прольотом*.

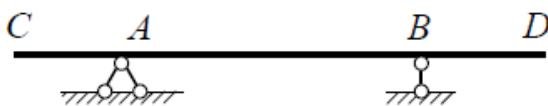
2. Проста балка з однією чи з двома консолями (рисунок 7.3 б, в). Частини, що звішуються, (BC на рисунку 5.3 б та CA і BD на рисунку 7.3 в) називаються *консолями*.



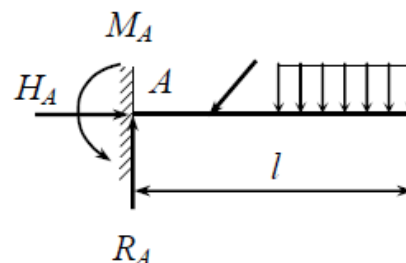
а)



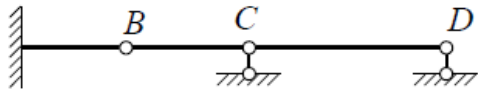
б)



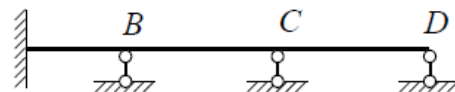
в)



г)



д)



е)

Рисунок 7.3 – Типи балок: *a* – проста балка; *б* – проста балка з однією консоллю; *в* – проста балка з двома консолями; *г* – консольна балка; *д* – шарнірна балка; *е* – нерозрізна балка

3. Консольна балка (рисунок 7.3 *г*). Вона має одну заземлюючу опору. Довжина балки l називається *вільтом*.

4. Шарнірна балка (рисунок 7.3 *д*). Утворюється приєднанням до простій чи консольній балці додаткових ділянок за допомогою шарнірів і шарнірно рухомих опор. При цьому число додаткових шарнірів повинне дорівнювати числу додаткових опор. На рисунку 7.3 *д* такими є шарніри *B*, *C* і опори *C*, *D*.

5. Нерозрізна балка (рисунок 7.3 *е*). Утворюється приєднанням до простій чи консольній балці додаткових шарнірно рухомих опор. Шарніри в додаткових опорах не перерізають балку, а тільки приєднуються до неї знизу.

Для визначення опорних реакцій в балках, навантажених плоскою системою сил, можна скласти три незалежних рівняння рівноваги. У балках 1–3 невідомих реакцій також три. Тому ці балки статично визначувані. Балка 4 (шарнірна) також статично визначувана, тому що число невідомих реакцій у додаткових опорах дорівнює числу додаткових рівнянь рівноваги, так як кожен проміжний шарнір додає одне додаткове рівняння: сума моментів щодо центра від усіх сил, розташованих по одну сторону від нього, дорівнює нулю.

Балка 5 (нерозрізна) статично невизначувана. Ступінь статичної невизначуваності дорівнює числу реакцій в додаткових опорах.

7.3. Визначення опорних реакцій в балках

Рівняння рівноваги, що складаються для визначення опорних реакцій, можна представити в трьох різних варіантах:

1) у виді сум проекцій сил на дві довільні не рівнобіжні один одному осі і суми моментів сил щодо будь-якої точки площини;

2) у виді суми проекцій сил на довільну вісь і двох сум моментів щодо будь-яких точок площини, що не лежать на одному перпендикулярі до зазначеної осі проекцій;

3) у виді трьох сум моментів щодо будь-яких точок площини, що не лежать на одній прямій.

Вибір того чи іншого варіанта складання рівнянь рівноваги проводиться з таким розрахунком, щоб по можливості не проводити спільне рішення рівнянь.

Для простої двохопорної балки (див. рисунок 7.3 а) такими можуть бути рівняння:

а) сума проекцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю:

$$\sum F_i^z = 0,$$

звідки знаходять H_A .

б) сума моментів усіх сил відносно опорного шарніра А дорівнює нулю:

$$\sum M_i^A = 0,$$

звідки знаходять R_B .

в) сума моментів усіх сил відносно шарніра В дорівнює нулю:

$$\sum M_i^B = 0,$$

звідки знаходять R_A .

Для контролю можна використовувати умову рівності нулю суми проекцій всіх сил на вертикаль:

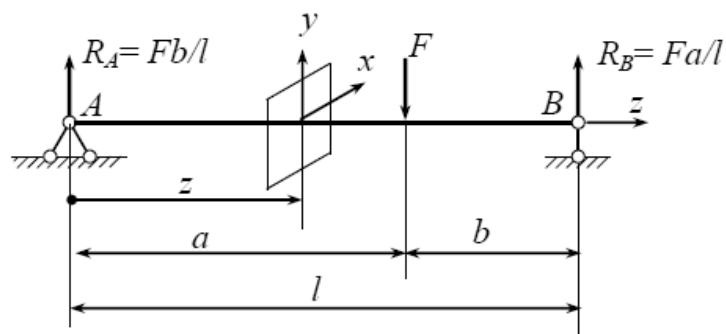
$$\sum F_i^y = 0.$$

Для консольних балок при визначенні реакцій раціональним є набір рівнянь у виді одного рівняння суми моментів і двох рівнянь сум проекцій сил на осі y , z . Для контролю слід використовувати умову рівняння суми моментів відносно будь-якої іншої точки, чим тієї, котра приймалася при визначенні реакцій.

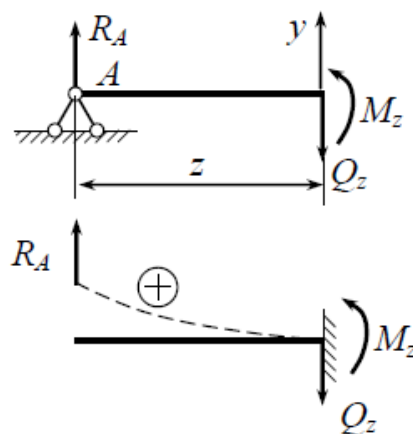
Для шарнірних балок додатковими рівняннями при визначенні реакцій є умови рівності нулю суми моментів у шарнірах, що з'єднують окремі частини балки.

7.4. Внутрішні силові фактори при згині

Для визначення внутрішніх зусиль при згині розглянемо просту двохопорну балку довжиною l , завантажену в проміжному перерізі z силою F (рисунок 7.4 а).



а)



б)

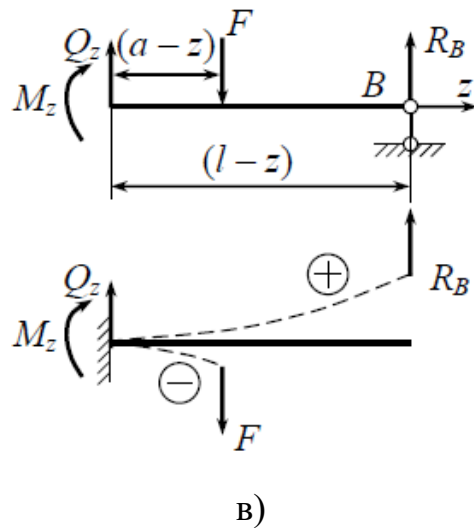


Рисунок 7.4 – Визначення внутрішніх силових факторів при згині:
a – розрахункова схема балки; *б*, *в* – відповідно ліва і права частини балки
для перерізу *z*

В опорах балки діють реакції, які визначаються із умов рівноваги балки. Із умов $\sum M_A = 0$ і $\sum M_B = 0$ визначаємо відповідно $R_B = Fa/l$; $R_A = Fb/l$.

Мислено розсічемо балку довільним поперечним перерізом з координатою *z* і відкинемо праву частину балки. Дію відкинутої частини замінимо дією поперечного зусилля Q_z і згинаючого моменту M_z (інші внутрішні силові фактори відсутні, так як проекції зовнішніх сил на осі *x* і *z* і моментів відносно осей *y* і *z* дорівнюють нулю).

З умов рівноваги лівої частини балки (рисунок 7.4 *б*) (сума проекцій сил на вісь *y*)

$$\sum F_y^{\text{лів}} = R_A - Q_z = 0$$

знаходимо поперечне зусилля в перерізі :

$$Q_z = R_A. \quad (7.1)$$

В загальному випадку, коли на балку діє довільне число зовнішніх зусиль, формула (5.1) для визначення поперечного зусилля Q_z в перерізі набуває вигляду

$$Q = \sum F_i, \quad (7.2)$$

де $\sum F_i$ – алгебраїчна сума проєкцій зовнішніх сил на вісь y , прикладених до балки по одну сторону від перерізу.

Поперечне зусилля Q в довільному поперечному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій зовнішніх сил на вісь y , прикладених по одну сторону від перерізу.

Прийmemo наступне правило знаків для поперечних зусиль : зовнішня сила F_i входить у суму в формулі (7.2) із знаком “+”, якщо вона прагне повернути відсічену частину, що розглядається, щодо перерізу, у якому визначається поперечне зусилля, по годинниковій стрілці.

Це правило універсальне, тобто воно справедливо і для лівої і для правої відсічених частин балки.

Відповідно до цього правила поперечне зусилля Q в перерізі z для лівої частини на рисунку 7.4 позитивне, тому що сила F , яка викликає це зусилля, прагне повернути відсічену частину по годинниковій стрілці, тобто $Q_z = R_A = Fb/l$.

На праву частину балки діють зовнішні сили: реакція R_B і сила F .

Для правої частини балки маємо теж саме значення поперечного зусилля

$$Q = -R_B + F = -Fa/l + F = Fb/l.$$

Із суми моментів зовнішніх сил відносно центра ваги перерізу, прикладених до лівої частини балки

$$\sum M_i^{\text{лів}} = -R_A z + M_z = 0,$$

знаходимо згинаючий момент :

$$M_z = R_A z = \frac{F b}{l} z. \quad (7.3)$$

При дії довільного числа зовнішніх сил і моментів формула (5.3) для визначення згинаючого моменту в перерізі приводиться до вигляду :

$$M_z = \sum M_i. \quad (7.4)$$

де $\sum M_i$ – алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил відносно центра ваги перерізу, прикладених по одну сторону від перерізу.

Згинаючий момент M_z в довільному перерізі балки з дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно центра ваги перерізу, прикладених по одну сторону від перерізу.

Прийmemo наступне правило знаків для згинаючих моментів: зовнішній момент M_i входить у суму в формулі (7.4) із знаком “+”, якщо він прагне викликати вигин балки опуклістю вниз.

Згідно з цим правилом реакція R_A викликає вигин лівої частини балки опуклістю вниз (рисунок 7.4 б). Тому згинаючий момент від неї у формулі (7.3) позитивний.

Для правої частини балки згинаючий момент в тому ж самому перерізі з створюється реакцією R_B , яка викликає вигин цієї частини опуклістю вниз (рисунок 7.4 б), і зовнішньою силою F , яка викликає вигин вгору.

Тому згинаючий момент від реакції R_B позитивний, а від сили F – негативний.

Сумарний згинаючий момент для правої частини балки

$$\begin{aligned}
 M_z &= R_B(l-z) - F(a-z) = \\
 &= \frac{F a}{l}(l-z) - F(a-z) = \frac{F b}{l} z .
 \end{aligned}$$

Одержане значення M_z для правої частини балки співпадає із значенням для лівої частини (див. формулу (7.3)).

7.5. Диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечним зусиллям і згинаючим моментом

Розглянемо балку з довільним навантаженням (рисунок 7.5, а). Розподілене навантаження вважатимемо додатним, напрямленим вгору (таке навантаження дає додатну складову для згинального моменту в будь-якому перерізі).

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий елемент $O_1 O_2$. Він перебуває в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, поперечних зусиль та згинальних моментів у перерізах O_1 і O_2 , розміщених на відстані dx один від одного (рисунок 7.5, б). Оскільки взагалі Q і M змінюються вздовж осі балки, то в перерізі O_1 маємо $Q(z)$ і $M(z)$, а в перерізі O_2 маємо $Q(z) + dQ$ і $M(z) + dM$. Для виводу будемо їх вважати додатними.

З умови рівноваги виділеної елементарної ділянки балки завдовжки dz дістанемо

$$\begin{aligned}
 \sum F_i^y &= Q + q dz - (Q + dQ) = 0; \\
 \sum M_i^{O_2} &= M + Q dz + q dz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0.
 \end{aligned}$$

Перше рівняння дає умову

$$\frac{dQ}{dz} = q. \tag{7.5}$$

Перша похідна від поперечного зусилля на ділянці балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження на цій ділянці.

Із другого рівняння, нехтуючи членом $q dz(dz/2)$ другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (7.6)$$

Перша похідна від згинаючого моменту на ділянці балки дорівнює поперечному зусиллю на цій ділянці.

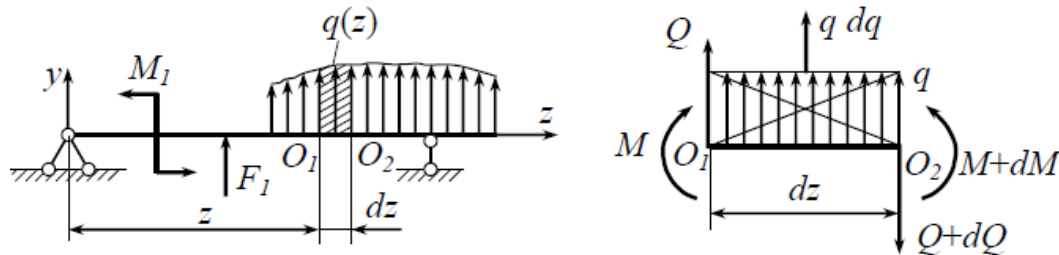


Рисунок 7.5 – Балка з довільним розподіленням навантаженням:
a – розрахункова схема; *б* – елемент балки

На підставі формул (7.5) і (7.6) будемо мати

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q. \quad (7.7)$$

Друга похідна від згинаючого моменту на ділянці балки дорівнює інтенсивності розподіленого зовнішнього навантаження.

Співвідношення (7.5) – (7.7) називають *диференціальними залежностями при згині (залежностями Д.І. Журавського)*.

Їх використовують при побудові і контролі правильності епюр поперечних зусиль і згинаючих моментів.

7.6. Епюри поперечних зусиль і згинаючих моментів

Побудову епюр поперечних зусиль і згинаючих моментів розглянемо на прикладах.

Приклад 1. Балка з защемленням довжиною l завантажена на вільному кінці зосередженою силою F (рисунок 7.6 а).

Помістимо початок координат на лівому кінці балки, вісь z направимо вздовж поздовжньої осі балки, а осі x і y , відповідно, вертикально і горизонтально до неї. (Таку ж система координат приймемо і в інших прикладах, крім випадків, що обумовлюються окремо). Мислено розсічемо балку перерізом з координатою z ($0 \leq z \leq l$).

Поперечне зусилля визначимо як суму зовнішніх сил, що прикладені ліворуч від перерізу :

$$Q = -F .$$

Знак “-” прийнятий тому, що сила F прагне повернути ліву відсічену частину балки щодо перерізу z проти годинникової стрілки. Поперечне зусилля Q не залежить від координати z і в усіх точках балки постійна.

Сила F відносно центра ваги перерізу утворює від’ємний згинаючий момент :

$$M = -F z .$$

Це рівняння прямої лінії. Для її побудови визначимо значення M в двох точках A і B на кінцях балки :

$$\text{при } z = 0 \quad M_A = 0 ; \quad \text{при } z = l \quad M_B = -F l .$$

Приклад 2. Балка з защемленням довжиною l зазнає дію розподіленого навантаження $q = \text{const}$ (рисунок 5.6 б) .

Поперечне зусилля в перерізі з координатою z ($0 \leq z \leq l$) дорівнює рівнодіючій розподіленого навантаження, що прикладене до балки ліворуч перерізу :

$$Q_y = -qz ,$$

а згинаючий момент – добутку цієї рівнодіючої на плече $z/2$:

$$M_x = -qz \cdot z/2 = -qz^2/2 .$$

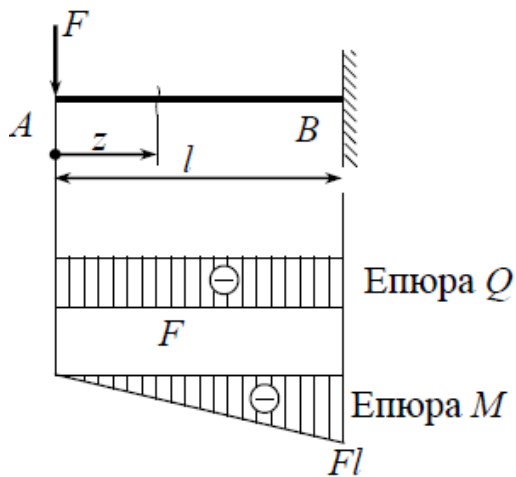
Це рівняння прямої і параболи, відповідно. Для їх побудови визначимо внутрішні силові фактори на кінцях і в середині балки :

при $z=0$ $Q_y = 0;$ $M_x = 0;$

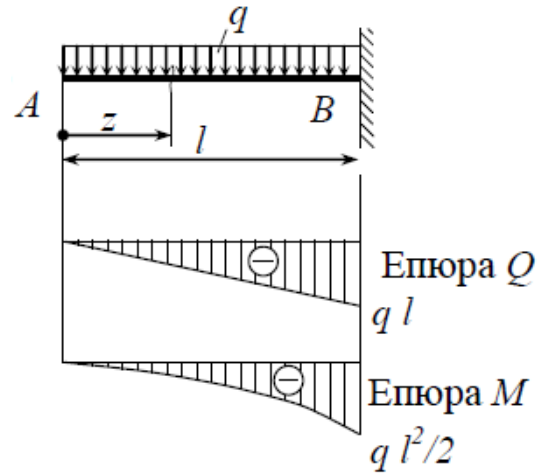
при $z=l$ $Q_y = -ql;$ $M_x = -ql^2/2;$

при $z=l/2$ $M_x = -ql^2/8.$

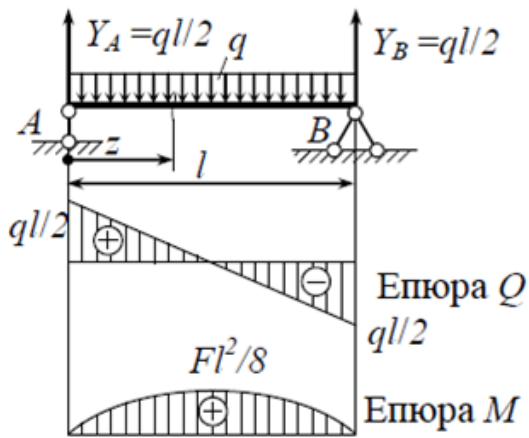
Як впливає із рисунка 5.6 б опуклість параболи направлена назустріч напрямку розподіленого навантаження q .



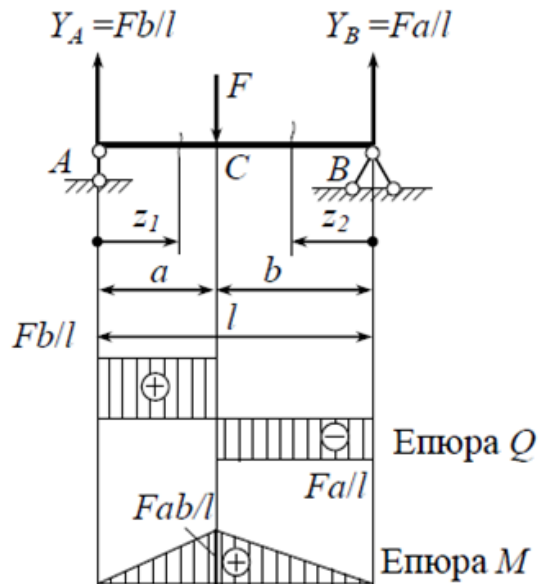
a)



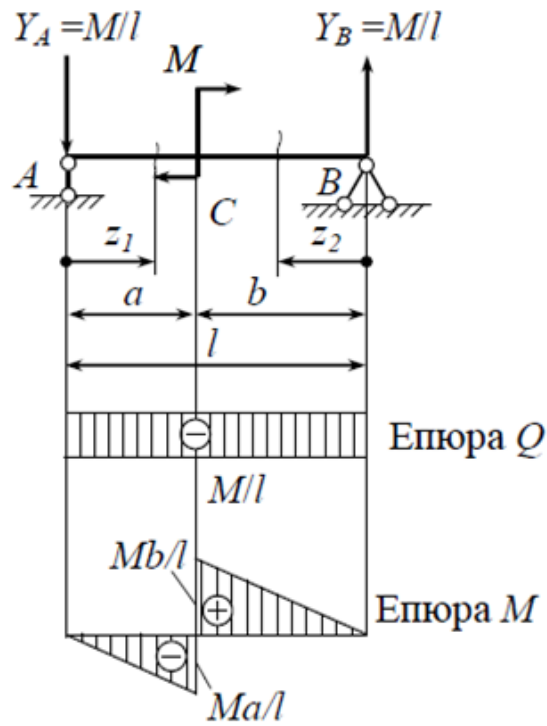
б)



в)



г)



д)

Рисунок 7.6 – Побудова епюр Q і M у балках

Контроль правильності епюр поперечних зусиль і згинаючих моментів

Із диференціальних залежностей Журавського Д.І. при згині і із розглянутих прикладів витікають наступні властивості епюр поперечних зусиль і згинаючих моментів :

1) На ділянці балки між зосередженими силами, в тому числі реакціями, епюра поперечних зусиль Q_y – пряма паралельна осі балки, а епюра згинаючих моментів M_x – похила до осі балки пряма (приклад 1, п. 7.6);

2) в точках прикладання зосереджених сил (і реакцій) епюра Q_y має “скачок” на величину сили, а епюра M_x – кутову точку ;

3) в точках прикладання зосередженого моменту епюра M_x має “скачок” на величину прикладеного моменту, а епюра Q_y – без змін ;

4) на ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням q епюра Q_y похила до осі балки пряма, а епюра M_x – парабола з опуклістю протилежною дії

навантаження q (приклад 1, п. 7.6). якщо на цій ділянці епюра Q_y змінює знак, то в перерізі де $Q_y = 0$ епюра M_x має екстремум;

5) в шарнірних опорах і з'єднаннях згинаючий момент рівний нулю, якщо там відсутній зовнішній момент (в цьому випадку згинаючий момент дорівнює зовнішньому прикладеному в цьому перерізі моменту).

Приклад 1

Для заданої консольної балки (рис. 7.7) побудувати епюри поперечних сил та згинаючих моментів, якщо: $a=1.5\text{м}$, $q=15\text{кН/м}$, $M=20\text{кНм}$, $F=10\text{кН}$.

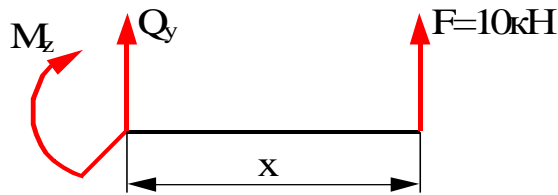
Розрахункова схема консольної балки креслиться в масштабі і розбивається на ділянки. За ділянку балки приймається відстань між суміжними навантаженнями. Дана балка розбивається на три ділянки.

Реакції опор в місці защемлення для консольної балки не визначаються, проводять перерізи на кожні ділянці і розглядають праву частину балки, тобто частину яка відноситься до вільного кінця.

Епюрою поперечної сили називається графік зміни поперечної сили по довжині. Поперечна сила при плоскому згині чисельно дорівнює алгебраїчні сумі зовнішніх сил, які знаходяться по одну сторону від перерізу. Поперечна сила приймається додатною, якщо вона намагається обернути частину балки яка розглядається за годинникової стрілкою, і від'ємною – при обертанні проти годинникової стрілки.

Епюрою згинаючих моментів називається графік зміни згинаючих моментів по довжині балки. Згинаючий момент чисельно дорівнює сумі моментів зовнішніх сил, які лежать по одну сторону від перерізу, відносно центра ваги перерізу. Згинаючий момент додатній, якщо він стискає верхні волокна балки, і від'ємний, коли стискає нижні волокна балки. Розглянемо рівновагу частини балки, яка відсічена перерізом 1-1.

Переріз 1-1 ($0 \leq x \leq a$)



Рівняння поперечної сили:

$$Q_y = -F = -10 \text{кН}.$$

В рівняння поперечної сили не ввійшла координата x , відповідно маємо рівняння прямої паралельної осі X .

Проводиться горизонтальна лінія, паралельна осі балки і в масштабі яка відповідає довжині балки. По вертикалі відкладається в масштабі величина поперечної сили. Додатні значення поперечної сили відкладаються вгору, від'ємні – вниз.

Рівняння згинаючого моменту:

$$M_z = F \cdot x.$$

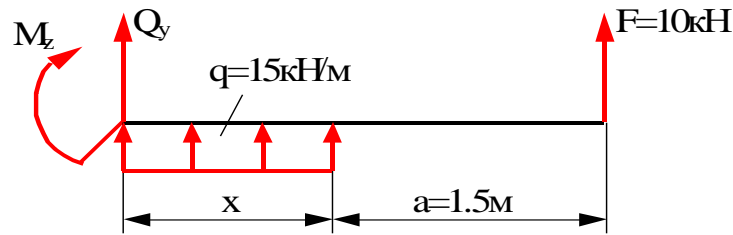
В рівняння згинаючого моменту x входить в перші степені, відповідно маємо рівняння прямої.

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = F \cdot a = 10 \cdot 1.5 = 15 \text{кНм}.$$

Проводиться горизонтальна лінія, паралельна осі і в масштабі яка відповідає довжині балки. По вертикалі відкладається згинаючий момент: від'ємний – вниз, додатній – вгору. В загальному випадку масштаб Q_y і M_z приймається неоднаковим.

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq a$)



Рівняння поперечної сили:

$$Q_y = -F - q \cdot x.$$

Текуча координата входить в рівняння поперечної сили в перші степені, відповідно маємо рівняння прямої лінії. Для її побудови визначаються дві точки.

$$Q_y(x=0) = -F = -10\text{ кН},$$

$$Q_y(x=a) = -F - q \cdot a = -10 - 15 \cdot 1.5 = -32.5\text{ кН}.$$

Рівняння згинаючого моменту:

$$M_z = F \cdot (a + x) + \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

Отримано рівняння кривої лінії (параболи), тому що x входить у другій степені. Для орієнтовної побудови кривої необхідно мати хоча б три точки.

$$M_z(x=0) = F \cdot a = 10 \cdot 1.5 = 15\text{ кНм},$$

$$M_z(x=a) = F \cdot (a + a) + \frac{q \cdot a^2}{2} = 10 \cdot (1.5 + 1.5) + \frac{15 \cdot 1.5^2}{2} = 46.875\text{ кНм}$$

$$M_z\left(x = \frac{a}{2}\right) = F \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) + \frac{q \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = 10 \cdot \left(1.5 + \frac{1.5}{2}\right) + \frac{15 \cdot \left(\frac{1.5}{2}\right)^2}{2} = 26.72\text{ кНм}.$$

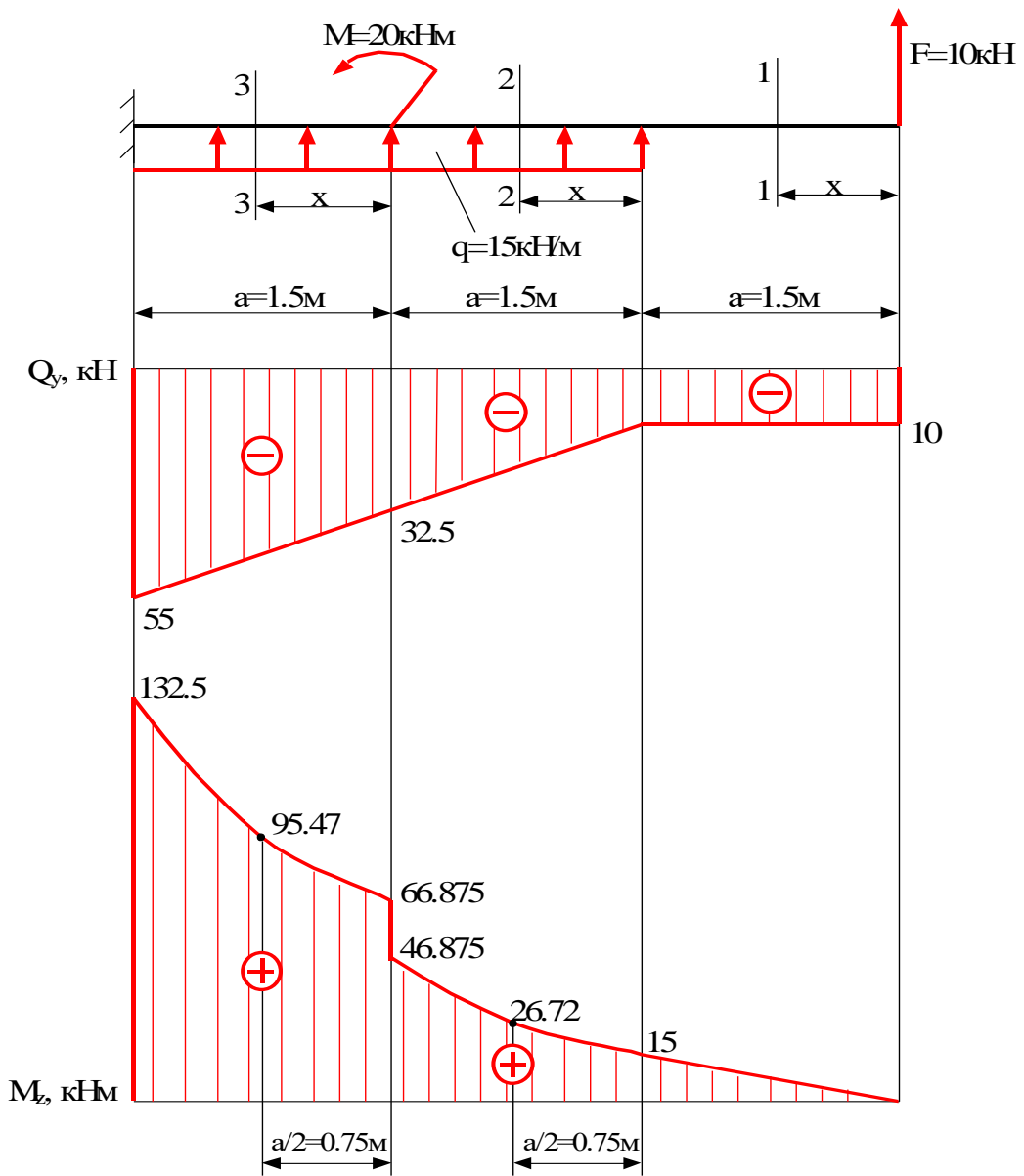
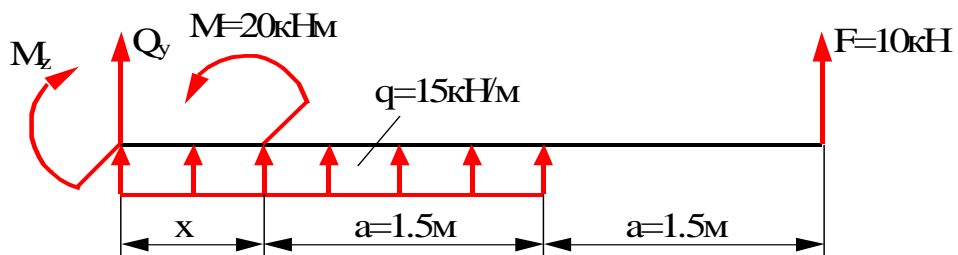


Рисунок 7.7 – Консольна балка (приклад 1)

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = -F - q \cdot (a + x),$$

$$Q_y(x=0) = -F - q \cdot a = -10 - 15 \cdot 1.5 = -32.5 \text{ кН},$$

$$Q_y(x=a) = -F - q \cdot (a+a) = -10 - 15 \cdot (1.5+1.5) = -55 \text{ кН},$$

$$M_z = F \cdot (a + a + x) + \frac{q \cdot (a + x)^2}{2} + M,$$

$$M_z(x=0) = F \cdot (a + a) + \frac{q \cdot a^2}{2} + M = 10 \cdot (1.5 + 1.5) + \frac{15 \cdot 1.5^2}{2} + 20 = 66.875 \text{ кНм}$$

$$\begin{aligned} M_z(x=a) &= F \cdot (a + a + a) + \frac{q \cdot (a + a)^2}{2} + M = \\ &= 10 \cdot (1.5 + 1.5 + 1.5) + \frac{15 \cdot (1.5 + 1.5)^2}{2} + 20 = 132.5 \text{ кНм}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z\left(x = \frac{a}{2}\right) &= F \cdot \left(a + a + \frac{a}{2}\right) + \frac{q \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right)^2}{2} + M = \\ &= 10 \cdot \left(1.5 + 1.5 + \frac{1.5}{2}\right) + \frac{15 \cdot \left(1.5 + \frac{1.5}{2}\right)^2}{2} + 20 = 95.47 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Приклад 2

Для заданої балки (рис. 7.8) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо: $a=2\text{м}$, $M=25\text{кНм}$, $F_1=15\text{кН}$, $F_2=25\text{кН}$.

В точках А і В виникають реактивні сили R_A і R_B . Горизонтальна складова в шарнірно-нерухомі опорі А дорівнює нулю, тому що немає зовнішніх сил, які діють в горизонтальному напрямку.

З умови рівноваги балки визначаються реакції.

Рівняння статки:

$$\sum M_A = 0, \quad M - F_1 \cdot a - F_2 \cdot (a+a) + R_B \cdot (a+a+a) = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + a)}{a + a + a} = \frac{-25 + 15 \cdot 2 + 25 \cdot (2 + 2)}{2 + 2 + 2} = 17.5 \text{кН},$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot (a + a + a) + M + F_1 \cdot (a + a) + F_2 \cdot a = 0,$$

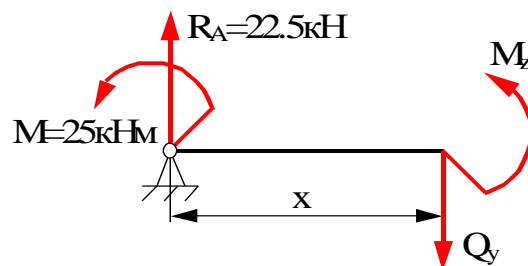
$$R_A = \frac{M + F_1 \cdot (a + a) + F_2 \cdot a}{a + a + a} = \frac{25 + 15 \cdot (2 + 2) + 25 \cdot 2}{2 + 2 + 2} = 22.5 \text{кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - F_1 - F_2 = 22.5 + 17.5 - 15 - 25 = 0.$$

Розрахункова схема балки креслиться в масштабі і розбивається на ділянки. За ділянку балки приймається відстань між суміжними навантаженнями. Дана балка розбивається на три ділянки. Проводяться перерізи на кожні ділянці і записуються рівняння поперечної сили та згинаючого моменту.

Переріз 1-1 ($0 \leq x \leq a$)



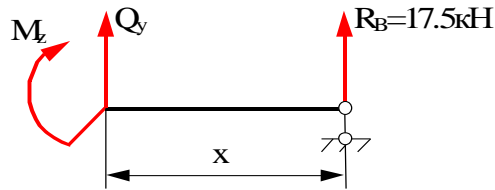
$$Q_y = R_A = 22.5 \text{кН},$$

$$M_z = R_A \cdot x - M,$$

$$M_z(x=0) = -M = -25 \text{кНм},$$

$$M_z(x=a) = R_A \cdot a - M = 22.5 \cdot 2 - 25 = 20 \text{ кНМ.}$$

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq a$)



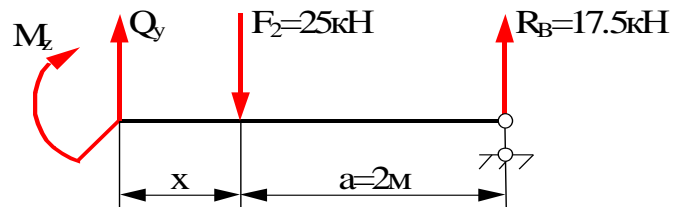
$$Q_y = -R_B = -17.5 \text{ кН},$$

$$M_z = R_B \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = R_B \cdot a = 17.5 \cdot 2 = 35 \text{ кНМ.}$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = -R_B + F_2 = -17.5 + 25 = 7.5 \text{ кН},$$

$$M_z = R_B \cdot (a+x) - F_2 \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = R_B \cdot a = 17.5 \cdot 2 = 35 \text{ кНМ},$$

$$M_z(x=a) = R_B \cdot (a+a) - F_2 \cdot a = 17.5 \cdot (2+2) - 25 \cdot 2 = 20 \text{ кНМ.}$$

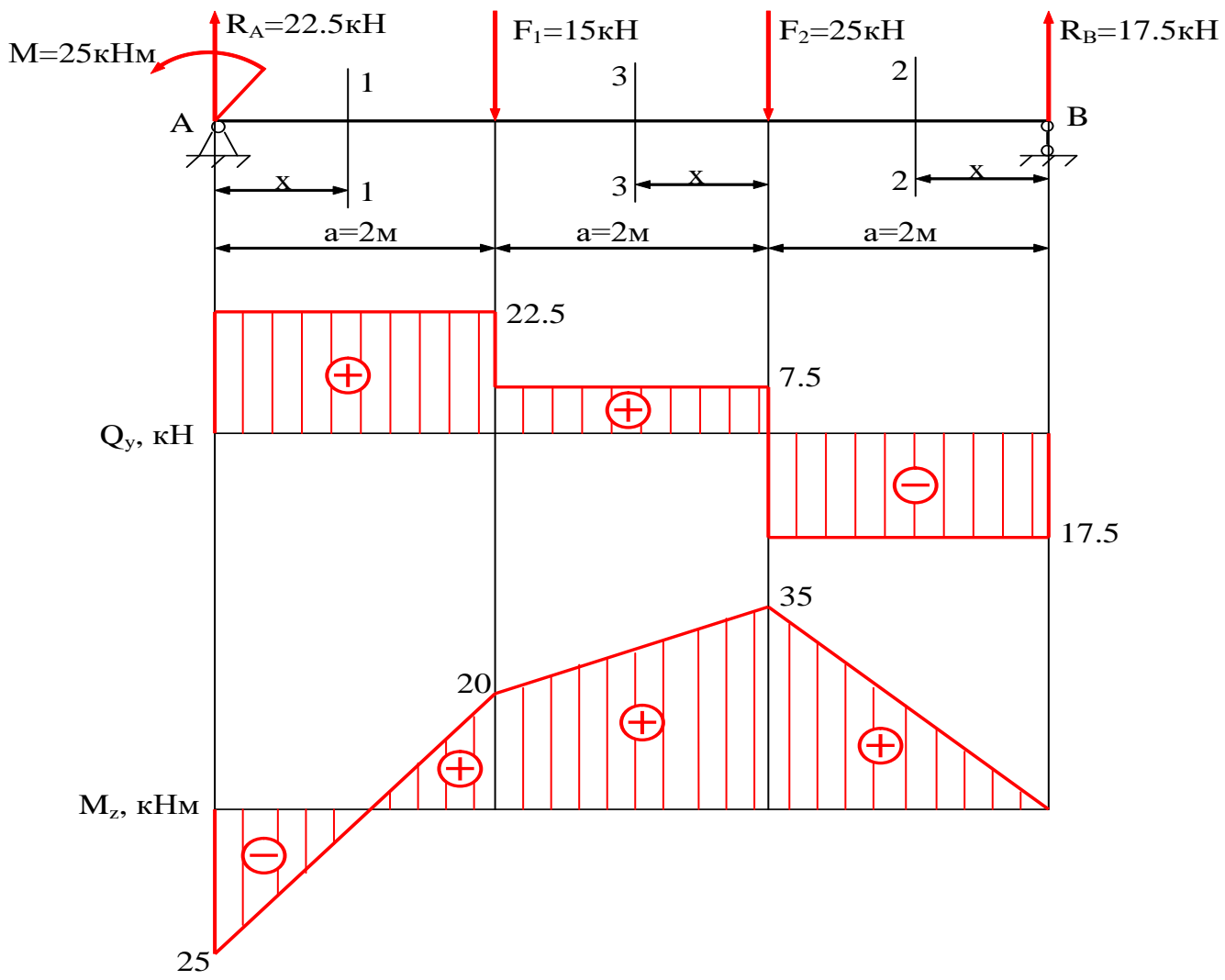


Рисунок 7.8 – Двохопорна балка (приклад 2)

Приклад 3

Для заданої балки (рис. 7.9) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо: $a=1\text{м}$, $q=10\text{кН/м}$, $M=30\text{кНм}$, $F=20\text{кН}$.

Рівняння статyki:

$$\sum M_A=0, \quad F \cdot a - M - q \cdot 3 \cdot a \cdot (a + 1.5 \cdot a) + R_B \cdot (a + 3 \cdot a) = 0,$$

$$R_B = \frac{-F \cdot a + M + q \cdot 3 \cdot a \cdot (a + 1.5 \cdot a)}{a + 3 \cdot a} =$$

$$= \frac{-20 \cdot 1 + 30 + 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (1 + 1.5 \cdot 1)}{1 + 3 \cdot 1} = 21.25 \text{кН},$$

$$\sum M_B = 0 \quad F \cdot (a + a + 3 \cdot a) - R_A \cdot (a + 3 \cdot a) - M + q \cdot 3 \cdot a \cdot 1.5 \cdot a = 0,$$

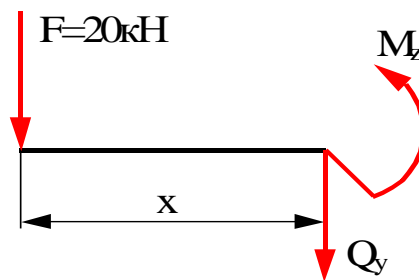
$$R_A = \frac{F \cdot (a + a + 3 \cdot a) - M + q \cdot 3 \cdot a \cdot 1.5 \cdot a}{a + 3 \cdot a} =$$

$$= \frac{20 \cdot (1 + 1 + 3 \cdot 1) - 30 + 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1.5 \cdot 1}{1 + 3 \cdot 1} = 28.75 \text{кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0, \quad -F + R_A - q \cdot 3 \cdot a + R_B = -20 + 28.75 - 10 \cdot 3 \cdot 1 + 21.25 = 0.$$

Переріз 1-1 ($0 \leq x \leq a$)



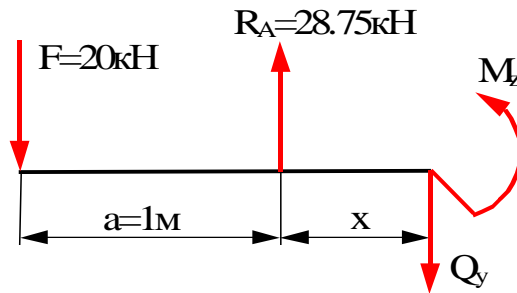
$$Q_y = -F = -20 \text{кН},$$

$$M_z = -F \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = -F \cdot a = -20 \cdot 1 = -20 \text{кНм}.$$

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq a$)



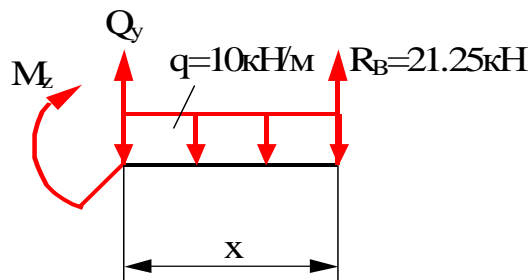
$$Q_y = -F + R_A = -20 + 28.75 = 8.75 \text{ kH},$$

$$M_z = -F \cdot (a + x) + R_A \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = -F \cdot a = -20 \cdot 1 = -20 \text{ kHm},$$

$$M_z(x=a) = -F \cdot (a+a) + R_A \cdot a = -20 \cdot (1+1) + 28.75 \cdot 1 = -11.25 \text{ kHm}.$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq 3a$)



$$Q_y = -R_B + q \cdot x,$$

$$Q_y(x=0) = -R_B = -21.25 \text{ kH},$$

$$Q_y(x=3 \cdot a) = -R_B + q \cdot 3 \cdot a = -21.25 + 10 \cdot 3 \cdot 1 = 8.75 \text{ kH},$$

$$M_z = R_B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=3 \cdot a) = R_B \cdot 3 \cdot a - \frac{q \cdot (3 \cdot a)^2}{2} = 21.25 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{10 \cdot (3 \cdot 1)^2}{2} = 18.75 \text{ кНм}.$$

Для визначення максимуму згинаючого моменту використовується диференціальна залежність між Q_y і M_z .

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y$$

Функція має максимум, коли перша похідна дорівнює нулю, а поперечна сила міняє знак з “+” на “-”. Значення поперечної сили для третього перерізу прирівнюємо до нуля і визначаємо значення x , при якому $Q_y=0$

$$-R_B + q \cdot x = 0,$$

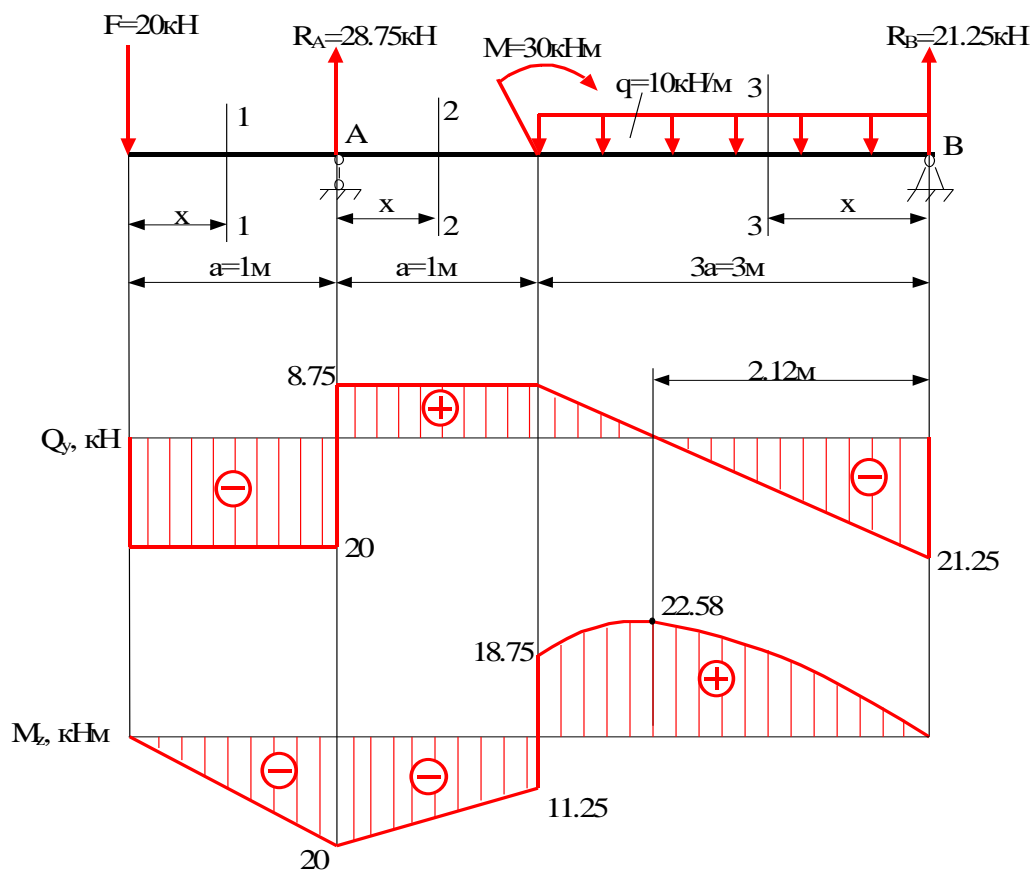


Рисунок 7.9 – Двохопорна балка (приклад 3)

$$x = \frac{R_B}{q} = \frac{21.25}{10} = 2.125 \text{ м}$$

Знайдене значення x підставляємо в рівняння згинаючого моменту

$$M_z(x = 2.125) = R_B \cdot 2.125 - \frac{q \cdot 2.125^2}{2} = 21.25 \cdot 2.125 - \frac{10 \cdot 2.125^2}{2} = 22.58 \text{ кНм}$$

Таким чином, на відстані 2.125 м від точки В згинаючий момент має максимум і дорівнює 22.58 кНм.

Приклад 4

Для заданої рами (рис. 7.10) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо: $a=2.5 \text{ м}$, $q=15 \text{ кН/м}$, $M=15 \text{ кНм}$, $F_1=20 \text{ кН}$, $F_2=30 \text{ кН}$.

Рівняння статички:

$$\sum M_A = 0, \quad F_1 \cdot a - Y_B \cdot 2 \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M = 0,$$

$$Y_B = \frac{F_1 \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M}{2 \cdot a} = \frac{20 \cdot 2.5 + 15 \cdot 2.5 \cdot \frac{2.5}{2} - 15}{2 \cdot 2.5} = 16.375 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_B - q \cdot a + F_2 - Y_A = 0,$$

$$Y_A = Y_B - q \cdot a + F_2 = 16.375 - 15 \cdot 2.5 + 30 = 8.875 \text{ кН},$$

$$\sum X = 0, \quad -F_1 + X_A = 0,$$

$$X_A = F_1 = 20 \text{ кН}.$$

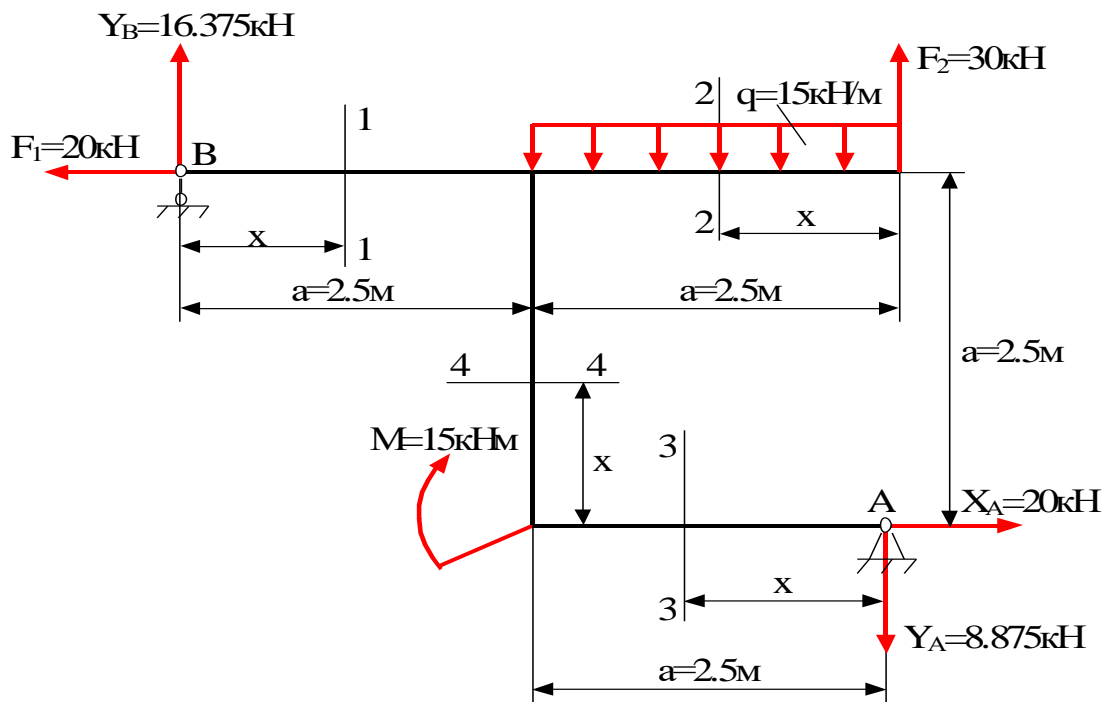
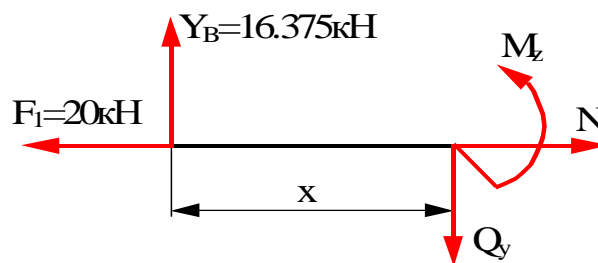


Рисунок 7.10 – Рама (приклад 4)

Переріз 1-1 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = Y_B = 16.375 \text{ кН.}$$

Величина осевих зусиль визначається з умови рівноваги відсіченої частини

$$\sum X = 0, \quad -N + F_1 = 0,$$

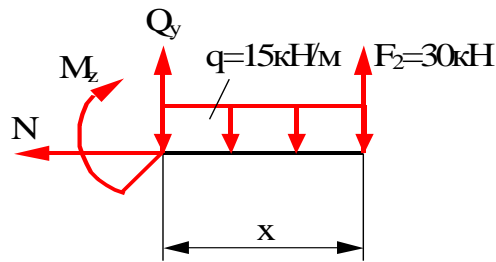
$$N = F_1 = 20 \text{ кН,}$$

$$M_z = Y_B \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = Y_B \cdot a = 16.375 \cdot 2.5 = 40.94 \text{ кНм.}$$

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = -F_2 + q \cdot x,$$

$$Q_y(x=0) = -F_2 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_y(x=a) = -F_2 + q \cdot a = -30 + 15 \cdot 2.5 = 7.5 \text{ кН},$$

$$N = 0,$$

$$M_z = F_2 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

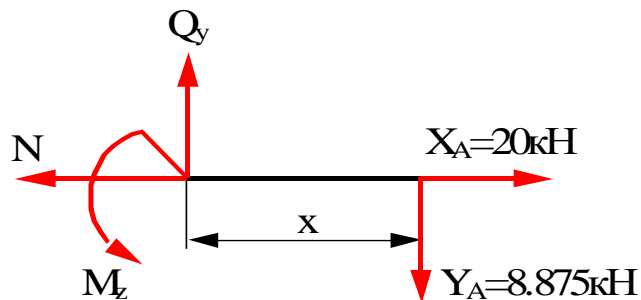
$$M_z(x=a) = F_2 \cdot a - \frac{q \cdot a^2}{2} = 30 \cdot 2.5 - \frac{15 \cdot 2.5^2}{2} = 28.125 \text{ кНм},$$

$$Q_y = -F_2 + qx = 0;$$

$$x = \frac{F_2}{q} = \frac{30}{15} = 2 \text{ м},$$

$$M_z(x=2) = F_2 \cdot 2 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = 30 \cdot 2 - \frac{15 \cdot 2^2}{2} = 30 \text{ кНм}.$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = Y_A = 8.875 \text{ кН},$$

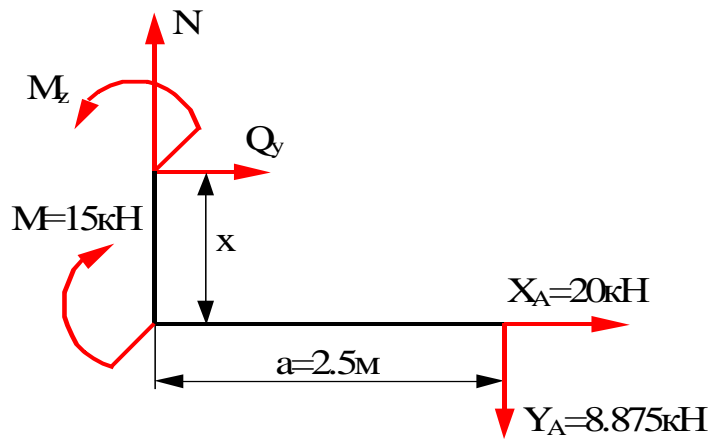
$$N = X_A = 20 \text{ кН},$$

$$M_z = Y_A \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = Y_A \cdot a = 8.875 \cdot 2.5 = 22.19 \text{ кНм}.$$

Переріз 4-4 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = -X_A = -20 \text{ кН},$$

$$N = Y_A = 8.875 \text{ кН},$$

$$M_z = Y_A \cdot a - X_A \cdot x + M,$$

$$M_z(x=0) = Y_A \cdot a + M = 8.875 \cdot 2.5 + 15 = 37.19 \text{ кНм},$$

$$M_z(x=a) = Y_A \cdot a - X_A \cdot a + M = 8.875 \cdot 2.5 - 20 \cdot 2.5 + 15 = -12.81 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри поперечних сил (рис. 7.11 а), згинаючих моментів (рис. 7.11 б). нормальних сил (рис. 7.11 в).

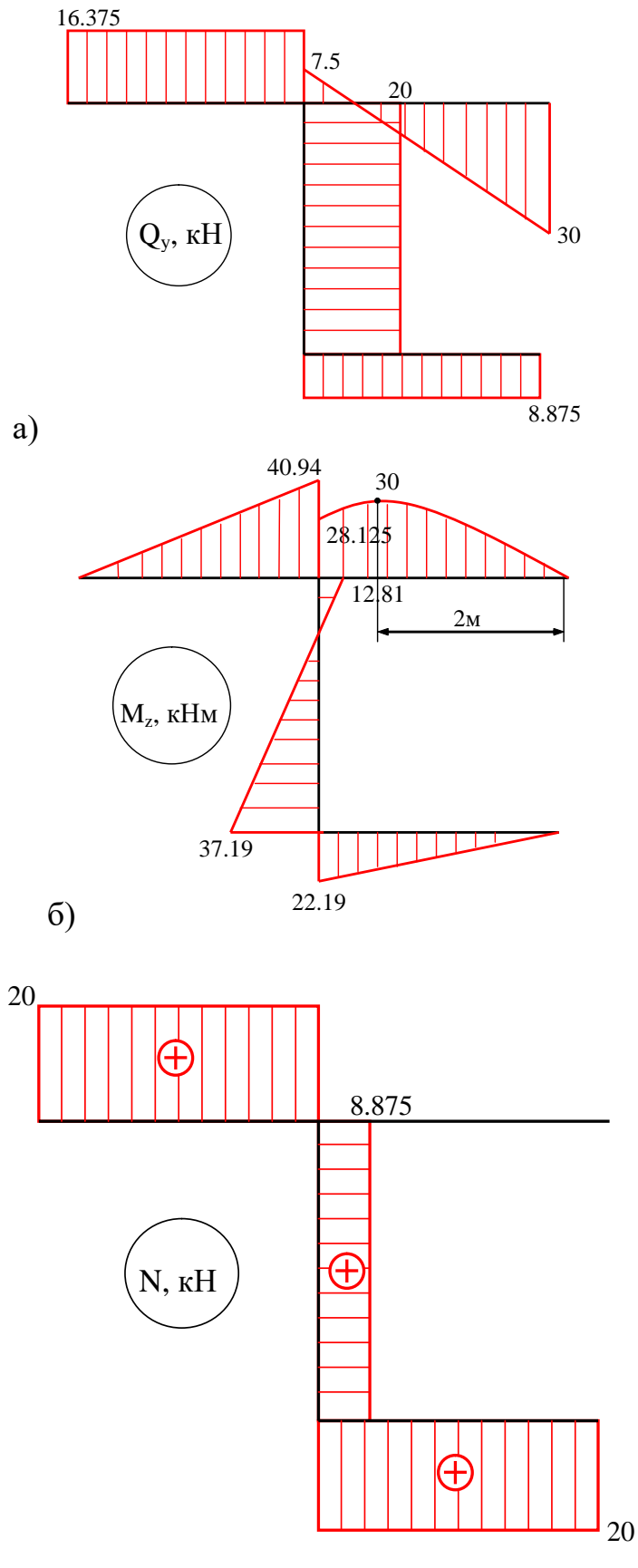


Рисунок 7.11 – Епюри: а) – поперечних сил, б) – згинаючих моментів, в) – нормальних сил

7.7. Нормальні напруження при прямому чистому згині

При чистому згині в поперечних перерізах балки діють тільки згинаючі моменти M_x , інші внутрішні силові фактори відсутні, в тому числі і поперечне зусилля $Q_y = 0$.

В цьому випадку, із залежності (7.6) витікає, що при чистому згині згинаючий момент на цій ділянці балки постійний: $M_x = \text{const}$.

Прикладом деформації чистого згину являється балка з защемленням під дією зосередженого моменту (рисунок 7.7), або вісь колісної пари вагону (рисунок 7.12). В обох випадках вага самих балок не враховується.

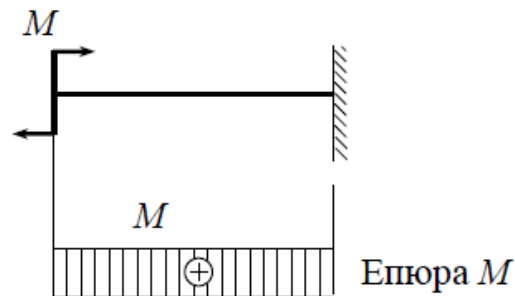


Рисунок 7.13 – Чистий згин консольної балки

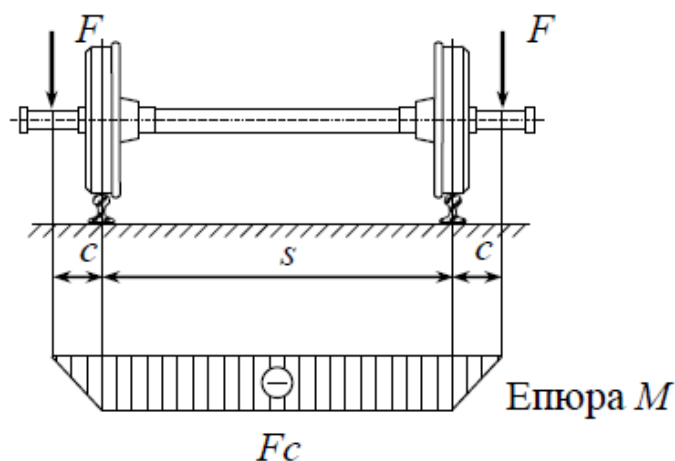


Рисунок 7.14 – Чистий згин колісної пари

Розглянемо деформацію чистого згину гумової моделі балки прямокутного перерізу, на бічну поверхню якої нанесена прямокутна сітка (рисунок 7.15).

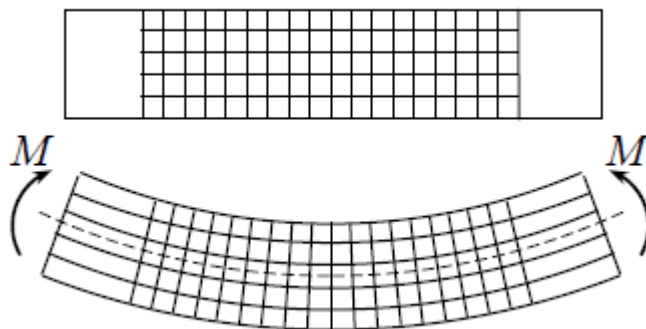


Рисунок 7.15 – Деформація чистого згину гумової моделі балки

По торцям балки прикладемо два моменти M . методом перерізів неважко встановити, що в усіх перерізах балки діє постійний згинаючий момент $M_x = M$, а поперечне зусилля $Q_y = 0$.

Під навантаженням поздовжня вісь і поздовжні лінії сітки зігнуться по дугам окружностей (в усіх перерізах діє один і той же згинаючий момент, тобто, радіуси кривизни поздовжніх ліній в усіх перерізах повинні бути однакові), поперечні лінії не викривлюючись, повернуться на деякі кути, залишаючись перпендикулярними поздовжнім лініям. Довжина середньої поздовжньої лінії не зміниться, розташовані вище неї поздовжні лінії видовжяться, а розташовані нижче – скоротяться.

Якщо припустити, що внутрішні деформації балки мають той же характер, що і на поверхні, то при чистому згині :

- справедлива гіпотеза плоских перерізів (поперечні перерізи балки, плоскі і нормальні до поздовжньої осі до прикладення навантаження, залишаються такими ж і при його дії);

- відсутній тиск волокон одне на інше (оскільки відсутнє поперечне зусилля);
- в поперечних перерізах діють тільки нормальні напруження (оскільки змінюються довжини волокон).

Для виведення формули визначення нормальних напружень, розглянемо деформацію консольної балки довжиною l прямокутного поперечного перерізу з розмірами b і h , навантаженою на вільному кінці моментом M (рисунок 7.16 а).

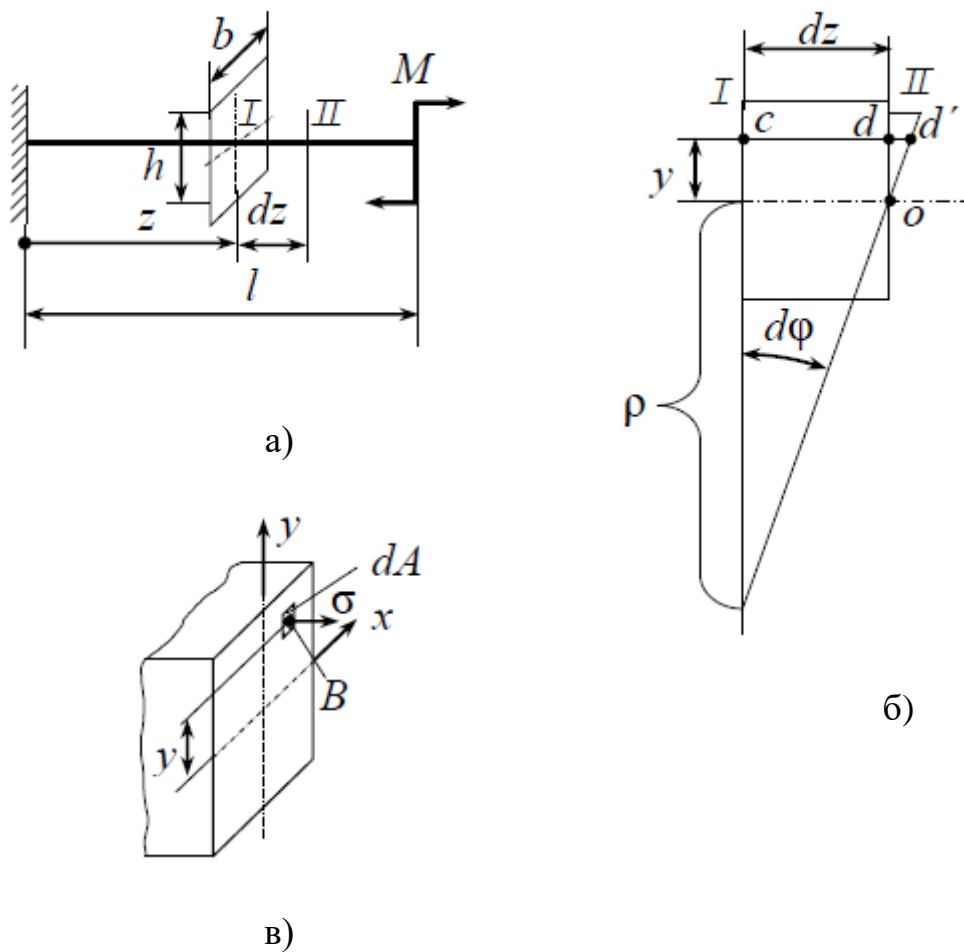


Рисунок 7.17 – Нормальні напруження при чистому згині

Двома поперечними перерізами I і II з координатами z і $z + dz$ ($0 \leq z \leq l$) виділимо нескінченно малий елемент балки довжиною dz (рисунок 7.17 а , б). Будемо вважати, що переріз I нерухомий, тоді переріз II під дією навантаження повернеться на кут $d\varphi$ (рисунок 7.17 б). Довжина середньої лінії не змінюється.

Виділимо в перерізі II довільну елементарну площадку dA (рисунок 7.17 в). Розміри площадки приймемо такими, щоб зміною нормальних напружень σ в середині неї можна знехтувати. Рівнодіюча внутрішніх сил на площадці dA прикладена в центрі площадки в точці B , координата якої y ($-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$, де h – висота поперечного перерізу).

Елементарний момент внутрішніх сил відносно осі x :

$$dM_x = \sigma y dA.$$

Інтегруючи цю залежність по всій площі перерізу A , отримаємо залежність між згинаючими моментами і нормальними напруженнями в перерізі балки:

$$M_x = \int_A \sigma y dA. \quad (7.8)$$

Розподіл нормальних напружень визначимо по відносним деформаціям і закону Гуку.

Розглянемо деформацію відрізка cd довжиною dz , проведеною паралельно поздовжньої осі. При дії навантаження точка d переміститься в положення d' . відносна деформація відрізка буде:

$$\varepsilon = \frac{dd'}{cd}. \quad (7.9)$$

Із $\Delta dd'O$ маємо : $dd' = y \operatorname{tg} d\varphi$.

З врахуванням малості $d\varphi$, можна покласти : $\operatorname{tg} d\varphi = d\varphi$,

Тоді : $dd' = y d\varphi$.

Довжина відрізка cd : $cd = dz = \rho d\varphi$,

де ρ - радіус кривизни зігнутої осі балки.

З врахуванням двох останніх залежностей вираз (7.9) набуває вигляду :

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (7.10)$$

По закону Гуку нормальне напруження в точці B :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{y}{\rho} E. \quad (7.11)$$

Підставивши із (7.11) в (7.8) значення нормального напруження, і винісши за знак інтегралу величини E і ρ , що не залежить від змінної інтегрування, отримаємо:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (7.12)$$

Інтеграл у виразі (7.12) називається осьовим моментом інерції перерізу. Він позначається:

$$J_x = \int_A y^2 dA. \quad (7.13)$$

Із врахуванням позначень :

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x.$$

Звідси величина, обернена радіусу кривизни осі балки :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (7.14)$$

Підставивши (7.14) в (7.11), отримаємо формулу для визначення нормальних напружень в перерізі балки в залежності від згинаючого моменту

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (7.15)$$

Із цієї формули витікає, що нормальні напруження в довільній точці поперечного перерізу прямо пропорційні її відстані y від нейтральної осі, тобто лінійно змінюються по висоті перерізу. Від координати x перерізу напруження не залежать, тобто по ширині перерізу нормальні напруження незмінні.

В перерізі балки є нейтральна вісь (або нульова лінія) в якій нормальні напруження рівні нулю. Відзначимо, що досі її положення було прийнято довільно: це координатна вісь Ox , що співпадає з віссю симетрії перерізу балки.

Положення нейтральної осі визначимо із умови, що поздовжня сила N в перерізі дорівнює нулю :

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (7.16)$$

Підставивши в (7.16) значення нормального напруження із (7.15), отримаємо:

$$N = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Відношення $\frac{E}{\rho} \neq 0$, так як радіус кривизни не дорівнює нескінченності :

$\rho \neq \infty$ (реальна балка деформована, її вісь зігнута).

Інтеграл в останній залежності називається статичним моментом площі перерізу відносно осі x , він позначається S_x .

Виконання умови (7.16) можливе, якщо статичний момент дорівнює нулю:

$$S_x = \int_A y dA = 0. \quad (7.17)$$

Це означає, що вісь Ox проходить через центр ваги поперечного перерізу і тому вісь x являється нейтральною.

Епюра розподілу нормальних напружень по перерізу балки прямокутного перерізу приведена на рисунку 7.18. Нейтральна вісь ділить переріз на дві зони : в одній виникають нормальні напруження, що розтягують, в другій – стискаючі. На нейтральній осі нормальні напруження рівні нулю. В прикладі, що розглядається, верхні волокна балки розтягуються, нижні – стискаються).

При прямому згині балка з поперечним перерізом, що має одну вісь симетрії, положення нейтральної осі визначається із умови (7.17). На рисунку 7.19 приведена епюра напружень в балці трикутного поперечного перерізу.

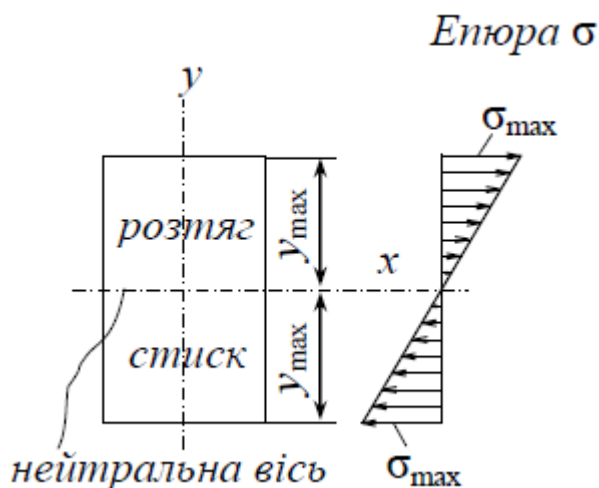


Рисунок 7.18 – Епюра нормальних напружень в прямокутному перерізі

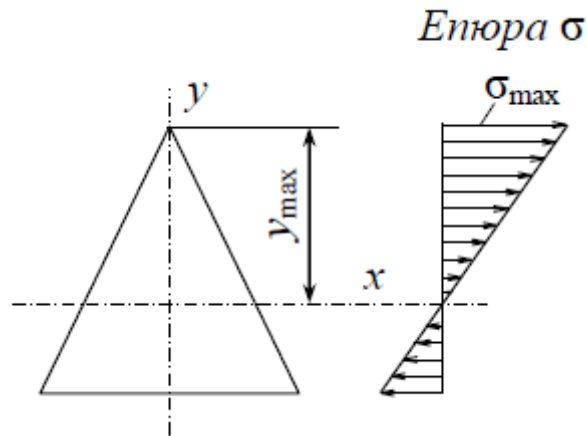


Рисунок 7.19 – Епюра нормальних напружень в трикутному перерізі

В точках з координатою $y = y_{\max}$ в перерізі діють максимальні напруження

:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x},$$

де позначимо :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (7.18)$$

Величина W_x називається осьовим моментом опору перерізу відносно осі x .

Умова міцності при чистому згині :

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (7.19)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження при згині ; визначається по результатах дослідження матеріалів.

При згині балки відносно осі y розрахункові формули відрізняються індексами і координатою:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} x; \quad \sigma = \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

7.8. Розрахунок на міцність при згині

В загальному випадку при плоскому прямому згині в поперечному перерізі балки виникають два внутрішніх силових фактора – згинаючий момент і поперечна сила. У відповідності з цим в поперечному перерізі балки з'являються нормальні і дотичні напруження. Нормальне напруження розраховують по формулі:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y,$$

де M_z – згинаючий момент в перерізі балки, який розглядається,
 I_z – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі Z,
 y – координата точки, в якій розраховується напруження, яка відраховується від осі Z.

Дотичні напруження визначають по формулі Д.І.Журавського:

$$\tau = \frac{Q_y S_z}{b I_z},$$

де Q_y – поперечна сила в перерізі балки, який розглядається,
 S_z – статичний момент відносно нейтральної осі Z відсіченої частини перерізу, яка розташована вище або нижче рівня, на якому визначається напруження,
 b – ширина перерізу на рівні, який розглядається.

Розрахунок на міцність при згині ведуть в основному по нормальним напруженням, виходячи з умови міцності

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma],$$

де σ_{\max} – найбільше нормальне напруження, яке виникає в точках найбільш віддалених від нейтральної лінії,

M_z – розрахункове значення згинаючого моменту, яке встановлюється з епюри,

$[\sigma]$ - допустиме напруження,

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} - \text{осьовий момент опору (} y_{\max} - \text{координата точки}$$

перерізу, найбільш віддаленої від нейтральної лінії).

В більшості випадків дотичні напруження невеликі і їх розрахунок не представляє практичного інтересу. Винятки можуть мати місце при розрахунку тонкостінних балок (наприклад зварних двутаврових), які навантажені великими зосередженими силами поблизу опор, або балок, які мають малу довжину, а також при розрахунку дерев'яних балок, які погано чинять опір зсуву вздовж волокон. У вказаних випадках, поряд з основним розрахунком по нормальним напруженням належить виконати розрахунок по найбільшим дотичним напруженням, які виникають в тому поперечному перерізі, де поперечна сила максимальна. Найбільші дотичні напруження для перерізів, які найбільш часто зустрічаються, типу круг, прямокутник, тавр, двутавр, швелер, кутник, трикутник, виникають на нейтральній осі. Умова міцності в цьому випадку має вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_{z \max}}{b I_z} \leq [\tau],$$

де Q_y – розрахункове значення поперечної сили, яке визначається з епюри,

$[\tau]$ – допустиме напруження на зсув,

b – ширина профілю на рівні нейтральної осі.

На міцність по нормальним напруженням при згині перевіряються крайні волокна перерізу, які зазнають розтягу або стиску.

На міцність по дотичним напруженням при поперечному згині розраховується елемент нейтрального шару, який знаходиться в умовах чистого зсуву.

Приклад

Для заданої балки (рис. 7.20) підібрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h=2b$) переріз і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю.

Виконати повну перевірку міцності двотаврової балки (по головним напруженням).

Матеріал балок: Ст.3.

$[\sigma]=160\text{МПа}$ (додаток 3); $[\tau]=0.6[\sigma]=100\text{МПа}$; $E=2\cdot 10^5\text{МПа}$ (додаток 4);
 $a=1\text{м}$; $q=50\text{кН/м}$; $F=80\text{кН}$; $M=40\text{кНм}$.

Будуємо епюри поперечних сил Q_y та згинаючих моментів M_z . Небезпечним по нормальних напруженнях буде переріз А.

Використовуючи умову міцності по нормальним напруженням підбирається переріз балки

$$\sigma = \frac{M_z \max}{W_z} \leq [\sigma],$$

$$M_{z\max} = 200\text{кНм} = 200 \cdot 10^3\text{Нм}; [\sigma] = 160\text{МПа} = 160 \cdot 10^6\text{Па},$$

$$W_z = \frac{M_{z \max}}{[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1250 \text{ см}^3.$$

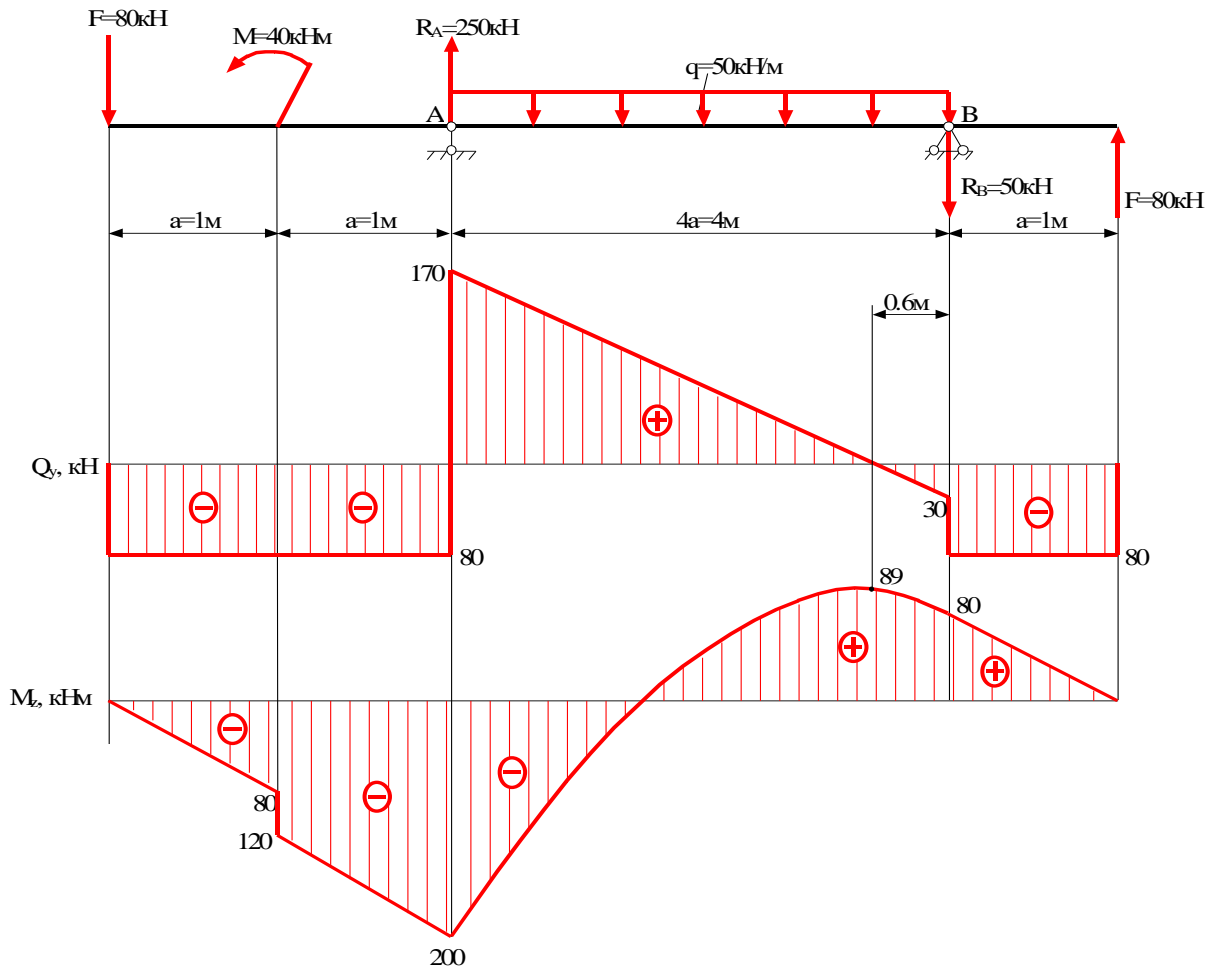


Рисунок 7.20 – Задана балка (приклад)

Двутавр

Відповідно до ДЕСТ 8239-72 (додаток 6) приймається двутавр №45 з наступними характеристиками: $I_z=27696 \text{ см}^4$, $W_z=1231 \text{ см}^3$, $S_z=708 \text{ см}^3$, $A_1=84.7 \text{ см}^2$, $h=45 \text{ см}$, $b=16 \text{ см}$, $t=1.42 \text{ см}$, $d=0.9 \text{ см}$.

Дійсні напруження

$$\sigma = \frac{M}{W_z} = \frac{200 \cdot 10^3}{1.231 \cdot 10^{-6}} = 162.5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 162.5 \text{ МПа}.$$

Перенапряжения

$$\frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{162.5 - 160}{160} \cdot 100\% = 1.56\% < 5\%.$$

Прямокутник

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; h = 2 \cdot b; W_z = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1250}{2}} = 12.3 \text{ см}; h = 2 \cdot b = 2 \cdot 12.3 = 24.6 \text{ см}.$$

Площа прямокутного перерізу

$$A_2 = b \cdot h = 12.3 \cdot 24.6 = 303.3 \text{ см}^2.$$

Круглий переріз

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1250}{\pi}} = 23.35 \text{ см}.$$

Площа круглого перерізу

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 23.35^2}{4} = 428.2 \text{ см}^2$$

Відношення ваги погонного метра балки прямокутного і круглого поперечного перерізу до погонного метра балки двотаврового перерізу дорівнює

$$A_1:A_2:A_3=1:3.58:5.06.$$

Епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перерізу показані на рис. 7.21. Нормальні напруження мають максимум в крайніх верхніх і нижніх волокнах, а дотичні – в центральних волокнах двутавра. При повній перевірці міцності, коли враховується дія і нормальних і дотичних напружень, за небезпечну точку приймається точка 2, де близькі до максимуму нормальні напруження і мають значну величину дотичні.

З рис. 7.21 видно, що небезпечним перерізом буде переріз в точці А, де згинаючий момент і поперечна сила мають максимальні значення.

Таким чином дані для розрахунку: $M_{z\max}=200\text{кНм}$; $Q_{y\max}=170\text{кН}$

Нормальні напруження в точці 2

$$\sigma_2 = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y = \frac{200 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.21 = 1.52 \cdot 10^8 \text{ Па} = 152 \text{ МПа}$$

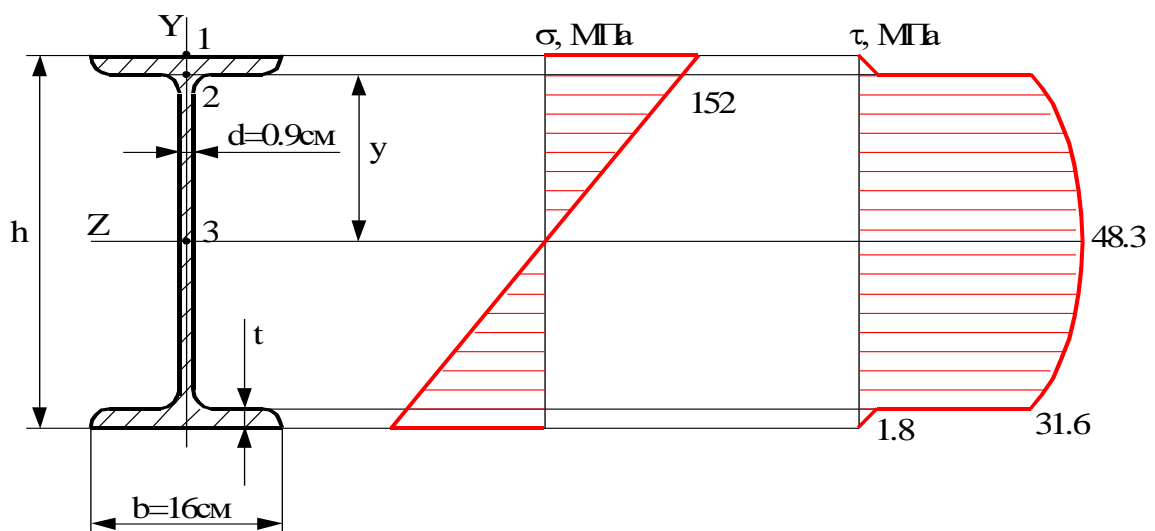


Рисунок 7.21 – Епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перерізу

Відстань у від осі Z до точки 2 визначається з рис. 7.21

$$y = \frac{h}{2} - t = \frac{45}{2} - 1.42 = 21.08 \text{ см} \approx 0.21 \text{ м}$$

Дотичні напруження в точці 3

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_z}{d \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 708 \cdot 10^{-6}}{0.9 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 48.3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48.3 \text{ МПа}$$

Статичний момент полки відносно осі Z

$$S_z^{\text{полки}} = A^{\text{полки}} \cdot y_c = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 16 \cdot 1.42 \cdot \left(\frac{45}{2} - \frac{1.42}{2} \right) = 464 \text{ см}^3 = 464 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

де $A^{\text{полки}} = b \cdot t$ – площа поперечного перерізу полки;

$y_c = \frac{h}{2} - \frac{t}{2}$ – відстань до центру ваги полки.

Дотичні напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{Q_{y \max} \cdot S_z^{\text{полки}}}{d \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 464 \cdot 10^{-6}}{0.9 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 31.6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31.6 \text{ МПа}$$

$$\tau'_2 = \frac{Q_{y \max} \cdot S_z^{\text{полки}}}{b \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 464 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1.8 \text{ МПа}$$

Еквівалентне напруження визначається по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{152^2 + 3 \cdot 31.6^2} = 161.5 \text{ МПа}$$

$$\text{Перенапруження } \frac{161.5 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0.97 \% < 5\%.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається згином?
2. Який згин називається прямим?
3. Чому дорівнюють поперечна сила та згинальний момент в довільному перерізі бруса?
4. Який закон розподілу нормальних напруг по поперечному перерізу бруса?
5. В яких точках перерізу виникають найбільші нормальні напруги?
6. В яких точках перерізу виникають найбільші дотичні напруги?
7. Що називається пружною лінією балки ?
8. Який зв'язок між кривизною бруса, згинальним моментом та жорсткістю балки ?

8. ПОЗАЦЕНТРОВИЙ РОЗТЯГ (СТИСК) СТЕРЖНЯ ВИСОКОЇ ЖОРСТКОСТІ

8.1 Основні поняття

Позацентровим розтягом (стиском) називається такий випадок дії сили на брус, коли сила, паралельна осі бруса, прикладена не в центрі ваги перерізу.

Враховуючи велику жорсткість бруса, можна застосувати принцип незалежності дій сил і розглядати позацентровий розтяг (стиск) як спільну дію косого згину, який викликається моментом $F \cdot AO$ і центрального розтягу (стиску) силою F (рис. 8.1).

Найбільший практичний інтерес представляють задачі на позацентровий розтяг (стиск), особливо у випадку, якщо допустимі значення напружень розтягу і стиску матеріалу різні. Прикладами таких матеріалів можуть бути чавун, бетон, цегляна і камінна кладка і т.д.

Нормальні напруження в довільні точці перерізу при позацентровому розтягу (стиску) можна визначити по формулі

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F z}{i_z^2} + \frac{y_F y}{i_y^2} \right), \quad (8.1)$$

де F – величина позацентрово прикладеної сили;

A – площа поперечного перерізу бруса;

z_F, y_F – координати точки прикладення сили F (т. А);

z, y – координати точки, де визначають напруження (т. В);

$i_z^2 = \frac{I_z}{A}, i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ - радіуси інерції перерізу.

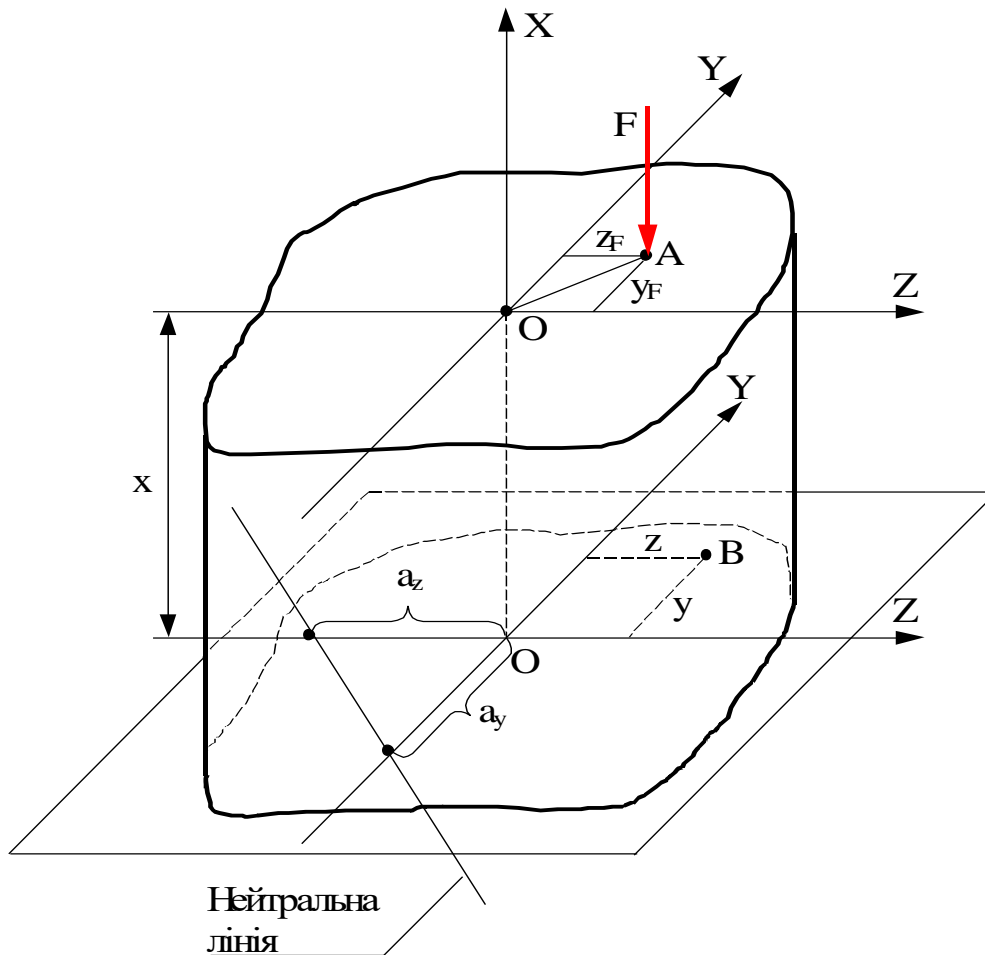


Рисунок 8.1 – Позацентровий стиск стержня

Необхідно відмітити, що всі координати і радіуси інерції визначають відносно головних центральних осей. Якщо напрямок цих осей вибрати таким, щоб точка прикладення сили лежала в першому квадранті (див. рис.8.1), то знаки доданків в формулі (7.1) будуть співпадати з знаками z , y точки, де визначають напруження.

Можна також використати наступне правило знаків при розрахунку напружень по формулы (7.1). Знаки A , i_y^2 і i_z^2 завжди позитивні. Сила F приймається додатною ($F > 0$) при розтягу і від'ємною ($F < 0$) при стиску. Координати z, y, z_F і y_F беруться зі своїми знаками.

Розрахунки на міцність виконують по нормальним напруженням, так як дотичні напруження в поперечних перерізах відсутні. Як і при косому згині,

величина нормальних напружень прямопропорційна відстані точки від нейтральної лінії, і для визначення небезпечної точки треба провести прямі, паралельні нейтральній лінії і дотичні до перерізу бруса.

Рівняння нейтральної лінії має вигляд:

$$1 + \frac{z_F z_0}{i_y^2} + \frac{y_F y_0}{i_z^2} = 0, \quad (8.2)$$

де z_0, y_0 – координати точки нейтральної лінії. Позначення інших величин ті ж, що і в формулі (8.1).

З виразу (8.2) видно, що нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу. При побудові нейтральної лінії визначають відрізки a_z і a_y , які відсікаються нею на головних центральних осях перерізу (див. рис. 8.1):

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}.$$

Якщо нейтральна лінія перетинає переріз, то вона ділить його на стиснуту і розтягнуту частини. Тоді для матеріалу, який по-різному опирається розтягу і стиску, є дві ймовірно небезпечні точки: в одній з них діє найбільше розтягуюче напруження, а в другій – найбільше стискаюче. Умова міцності виконується, якщо найбільше розтягуюче напруження не перевищує допустимого напруження при розтягу

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma_p],$$

а найбільше по абсолютній величині стискаюче напруження не перевищує допустимого напруження при стиску

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_c].$$

Приклад

Для заданого перерізу визначити допустиме навантаження, якщо відомі координати точки прикладення рівнодіючої всіх навантажень F і величина допустимих напружень: $[\sigma]_{\text{ст}}=120\text{МН/м}^2$ і $[\sigma]_{\text{р}}=30\text{МН/м}^2$, а також побудувати просторову епюру розподілу напружень по перерізу. Координати точки прикладення рівнодіючої F в системі головних центральних осей $y_F=8\text{см}$, $z_F=-5\text{см}$.

Розбиваємо складний переріз на ряд простих, центр ваги яких легко визначити. В даному випадку на півкруг, прямокутник і трикутник (рис. 7.2).

Для даного перерізу стержня визначаємо положення центра ваги перерізу відносно довільно вибраних допоміжних осей Z_0 і Y_0 по формулі:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{zi}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3},$$

де $y_1=12.55\text{см}$, $y_2=5\text{см}$, $y_3=1\text{см}$ – відстані від центра ваги півкруга, прямокутника і трикутника до осі Z ;

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 12^2}{8} = 56.55\text{см}^2, \quad A_2 = 12 \cdot 10 = 120\text{см}^2, \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9\text{см}^2 \quad \text{– площі}$$

відповідно півкруга, прямокутника і трикутника.

Отримуємо:

$$y_c = \frac{12.55 \cdot 56.55 + 5 \cdot 120 - 1 \cdot 9}{56.55 + 120 - 9} = 7.76\text{см}.$$

В системі координат Z_0 і Y_0 , знаходимо центр ваги складного перерізу C і проводимо головні центральні осі Z_C і Y_C (ось Y_C для даного перерізу є головною як ось симетрії).

Визначимо головний центральний момент інерції відносно осі Y_C (додаток 7):

$$I_{Y_C} = I_{Y_1} + I_{Y_2} - I_{Y_3} = \frac{\pi \cdot 12^4}{128} + \frac{10 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 3 \cdot (6^2 - 3^2)}{36} = 1935.44 \text{ см}^4$$

Застосовуючи формули моментів інерції при паралельному переносі осей визначимо головний центральний момент інерції відносно осі Z_C :

$$I_{Z_C} = I_{Z_1} + a_1^2 A_1 + I_{Z_2} + a_2^2 A_2 - (I_{Z_3} + a_3^2 A_3) = \frac{12^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) + 4.79^2 \cdot 56.55 + \frac{12 \cdot 10^3}{12} + 2.76^2 \cdot 120 - \left(\frac{6 \cdot 3^3}{36} + 6.76^2 \cdot 9 \right) = 2938.07 \text{ см}^4,$$

де $a_1 = y_1 - y_C = 12.55 - 7.76 = 4.79 \text{ см}$, $a_2 = y_2 - y_C = 5 - 7.76 = -2.76 \text{ см}$,

$a_3 = y_3 - y_C = 1 - 7.76 = -6.76 \text{ см}$ – відстані від центру ваги півкола, прямокутника і трикутника до центральної осі Z_C .

Координати точки прикладення рівнодіючої F в центральні системі координат Z_C і Y_C .

$$y_F = 8 \text{ см}; z_F = -5 \text{ см}.$$

Площа перерізу:

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = 56.55 + 120 - 9 = 167.55 \text{ см}^2.$$

Радіуси інерції:

$$i_y^2 = \frac{I_{Y_C}}{A} = \frac{1935.44}{167.55} = 11.55 \text{ см}^2, \quad i_z^2 = \frac{I_{Z_C}}{A} = \frac{2938.07}{167.55} = 17.535 \text{ см}^2.$$

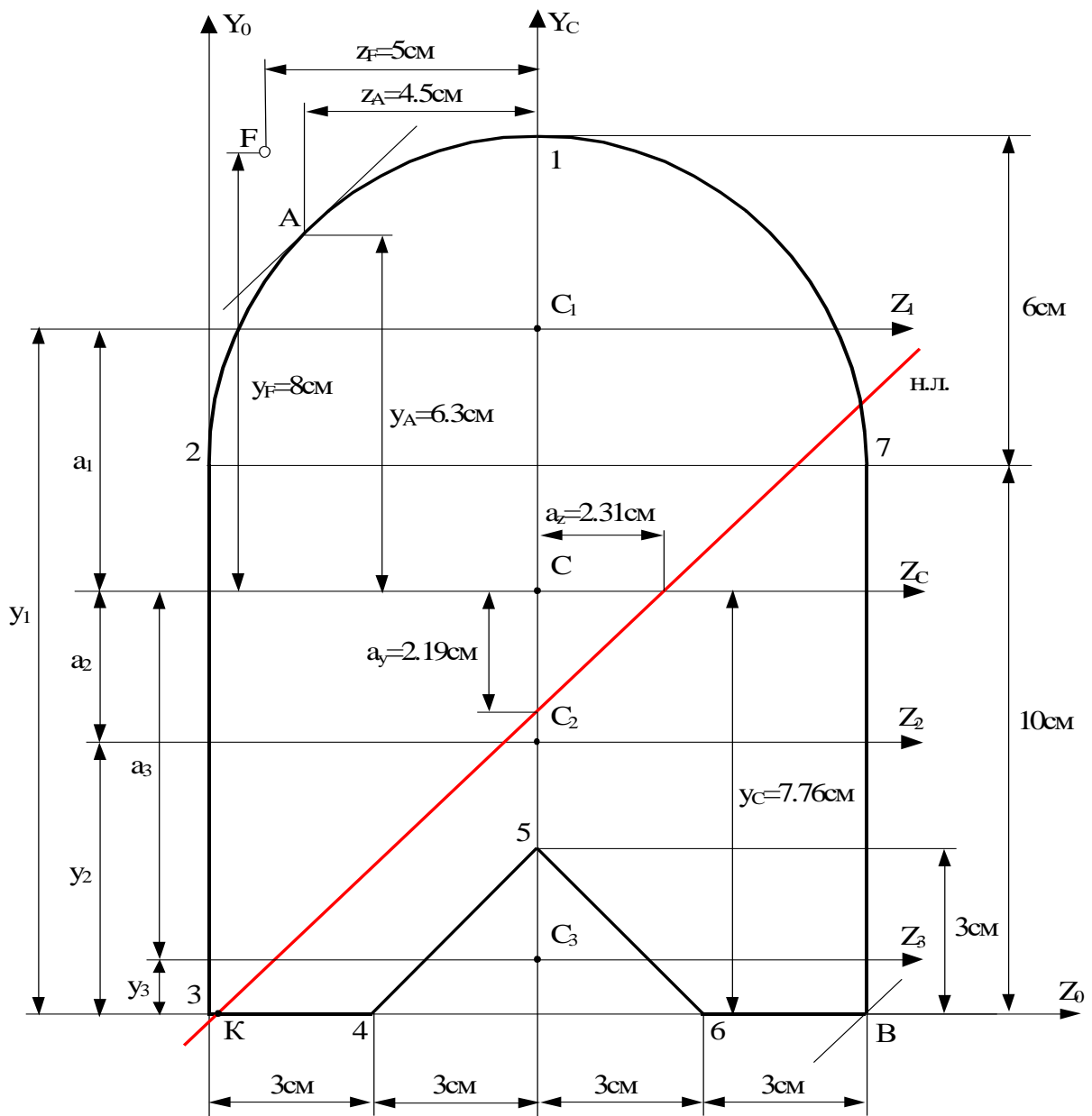


Рисунок 8.2 – Розрахункова схема перерізу

Визначимо положення нейтральної лінії відносно поперечного перерізу бруса.

З рівняння нейтральної осі:

$$\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_N}{i_z^2} + \frac{z_F z_N}{i_y^2} \right) = 0$$

при $z_N=0$ знайдемо, що:

$$y_N = a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{17.535}{8} = -2.19 \text{ см.}$$

Аналогічно, при $y_N=0$

$$z_N = a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{11.55}{(-5)} = 2.31 \text{ см.}$$

Проводимо нейтральну лінію. Так як нейтральна лінія проходить через перерізи стержня, то в поперечному перерізі його одночасно діють стискаючі і розтягуючі напруження.

Тому, для матеріалу стержня, неоднаково працюючому на стиск і розтяг, необхідна перевірка по умовам міцності на стиск і розтяг.

З рівнянь міцності визначаємо допустиме навантаження:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_z^2} + \frac{z_F z}{i_y^2} \right) \leq [\sigma],$$

звідки:

$$[F] = \frac{[\sigma] \cdot A}{1 + \frac{y_F y}{i_z^2} + \frac{z_F z}{i_y^2}}.$$

Величина навантаження $[F]$ в зоні стиску, з рівняння міцності для найбільш віддаленої від нейтральної осі точки А.

$$[F]_{cm} = -\frac{[\sigma]_{cm} \cdot A}{1 + \frac{y_F y_A}{i_z^2} + \frac{z_F z_A}{i_y^2}} = -\frac{1200 \cdot 167.55}{1 + \frac{8 \cdot 6.3}{17.535} + \frac{(-5) \cdot (-4.5)}{11.55}} = -34.55m,$$

де $y_A=6.3\text{см}$ і $z_A=-4.5\text{см}$ – координати небезпечної точки (т. А) в центральній системі осей в зоні стиску.

Величина навантаження $[F]$ в зоні розтягу:

$$[F]_p = \frac{[\sigma]_p \cdot A}{1 + \frac{y_F y_B}{i_z^2} + \frac{z_F z_B}{i_y^2}} = \frac{300 \cdot 167.55}{1 + \frac{8 \cdot (-7.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 6}{11.55}} = -9.78m$$

де $y_B=-7.76\text{см}$ і $z_B=6\text{см}$ – координати небезпечної точки (т.В)

Знак “-” тому, що сила F стискуюча.

З двох отриманих значень за допустиме навантаження приймаємо найменше по модулю:

$$[F]=9.78m$$

Знаючи величину навантаження F , визначаємо напруження в характерних точках перерізу, підставивши в формулу для напружень

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_z^2} + \frac{z_F z}{i_y^2} \right)$$

координати цих точок в головній центральній системі осей:

Точка 1 ($y_I=8.24\text{см}$; $z_I=0$)

$$\sigma_1 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot 8.24}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 0}{11.55} \right) = -277.81 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка А ($y_A=6.3\text{см}$; $z_A=-4.5\text{см}$)

$$\sigma_A = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot 6.3}{17.535} + \frac{(-5) \cdot (-4.5)}{11.55} \right) = -339.85 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка 2 ($y_2=2.3\text{см}$; $z_2=-6\text{см}$)

$$\sigma_2 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot 2.3}{17.535} + \frac{(-5) \cdot (-6)}{11.55} \right) = -270.72 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка 3 ($y_3=-7.76\text{см}$; $z_3=-6\text{см}$)

$$\sigma_3 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot (-7.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot (-6)}{11.55} \right) = -0.61 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка 4 ($y_4=-7.76\text{см}$; $z_4=-3\text{см}$)

$$\sigma_4 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot (-7.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot (-3)}{11.55} \right) = 74.69 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка 5 ($y_5=-4.76\text{см}$; $z_5=0$)

$$\sigma_5 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot (-4.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 0}{11.55} \right) = 69.44 \text{ кг} / \text{см}^2$$

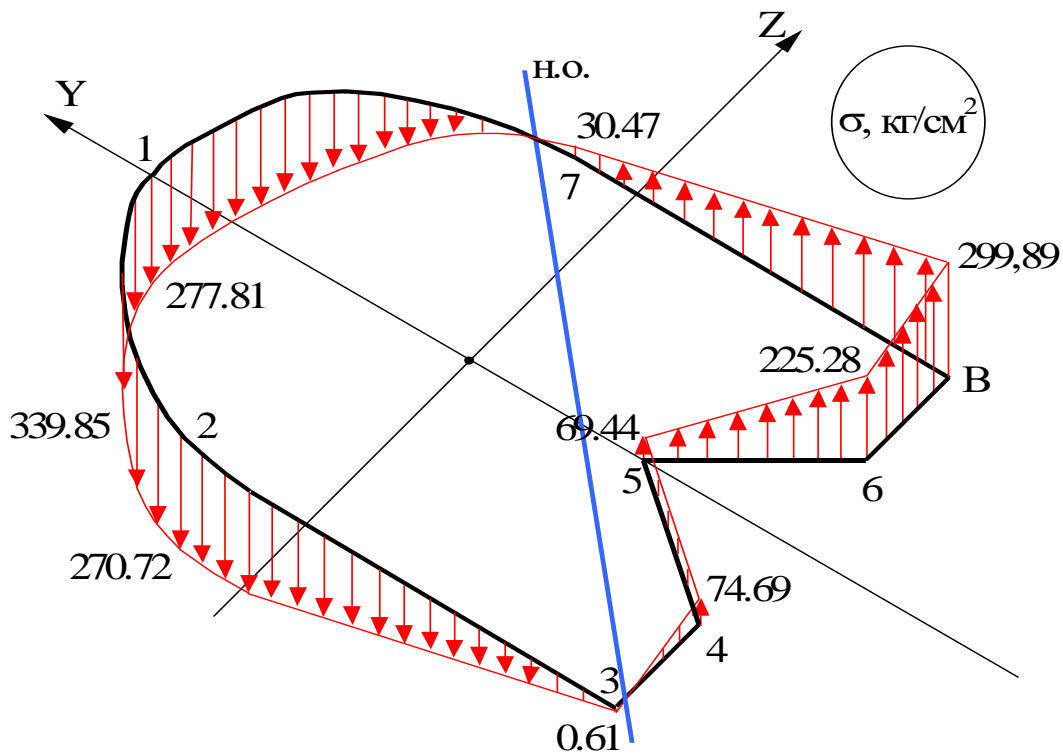


Рисунок 8.3 – Епюра

Точка 6 ($y_6 = -7.76 \text{ см}; z_6 = 3 \text{ см}$)

$$\sigma_6 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot (-7.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 3}{11.55} \right) = 225.28 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка В ($y_B = -7.76 \text{ см}; z_B = 6 \text{ см}$)

$$\sigma_B = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot (-7.76)}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 6}{11.55} \right) = 299.89 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Точка 7 ($y_7 = 2.3 \text{ см}; z_7 = 6 \text{ см}$)

$$\sigma_7 = -\frac{9.78 \cdot 10^3}{167.55} \left(1 + \frac{8 \cdot 2.3}{17.535} + \frac{(-5) \cdot 6}{11.55} \right) = 30.47 \text{ кгс / см}^2$$

Знайдені напруження в точках в масштабі відкладаємо на аксонометричному рисунку стержня. Отримаємо просторову епюру розподілу напружень в перерізі стержня (рис. 8.3).

Наприклад, побудуємо епюру розподілу напружень на лінії 3-4.

Для цього відкладаємо напруження в точці 4 і, так як воно додатне, спрямовуємо його вверх. З кінця вектора σ_4 проводимо пряму лінію через нульову точку К (так як тут н.о. перетинає цю грань) до перетину з ребром 3 стержня. Отриманий відрізок на ребрі в масштабі дасть напруження в точці 3. І так далі.

Запитання для самоперевірки

1. Який вид деформації називається позацентровим стиском (розтягом)?
2. Які напруги виникають в поперечному перерізі бруса при позацентровому стискові (розтязі)?
3. Що таке ядро перерізу?
4. Що таке радіус інерції перерізу?

9. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ (ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ)

9.1. Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)

Згідно цієї теорії, переважний вплив на міцність здійснює величина найбільшого нормального напруження. Припускається, що порушення міцності в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення σ^0 . Останнє встановлюється при простому розтягу або стиску на зразках із даного матеріалу.

Умова порушення міцності при складному напруженому стані має вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_+^0 \\ |\sigma_3| &= \sigma_-^0\end{aligned}\quad (9.1)$$

Умова міцності з коефіцієнтом запасу n наступне

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+] \quad (9.2)$$

або

$$|\sigma_3| \leq [\sigma_-] \quad (9.3)$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$

9.2. Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)

Згідно цієї теорії, в якості критерію міцності приймають найбільшу по абсолютній величині лінійну деформацію. Припускається, що порушення

міцності в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільша лінійна деформація ε_{\max} досягає свого небезпечного значення ε^0 . Останнє визначається при простому розтягові або стисковій зразків із даного матеріалу.

Таким чином, умова руйнування наступна

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon^0 \quad (9.4)$$

а умова міцності

$$|\varepsilon_{\max}| \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^0}{n} \quad (9.5)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразимо умову міцності (163) в напруженнях. Нехай найбільше відносне видовження буде ε_1 . Тоді

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (9.6)$$

При простому розтягові, прийнявши в якості допустимого напруження $[\sigma]$, для найбільшого відносного видовження допускаємо величину

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{A} \quad (9.7)$$

Підставимо вирази для ε_{\max} і $[\varepsilon]$ в умову міцності (9.5). Тоді

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{A} \quad (9.8)$$

або

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (9.10)$$

Як видно із умови міцності (9.8), в цій теорії з допустимим напруженням потрібно порівнювати не те або інше головне напруження, а їх комбінацію. Еквівалентне напруження в цьому випадку

$$\sigma_{\text{еквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (9.11)$$

9.3. Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)

Тут в якості критерію міцності прийнята величина найбільшого дотичного напруження. Згідно цієї теорії припускається, що граничний стан в загальному випадку настає тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{max} досягне небезпечного значення τ^0 . Останнє визначається при досягненні граничного стану у випадку простого розтягу.

$$\tau_{\text{max}} = \tau^0 \quad (9.12)$$

умова міцності

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{n} \quad (9.13)$$

Оскільки $\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, а $\tau^0 = \frac{1}{2}\sigma^0$, то умови руйнування і міцності (9.11) і (9.12) можна виразити через головні напруження так

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma^0 \quad (9.14)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (9.15)$$

Таким чином, еквівалентним напруженням по третій теорії є різниця алгебраїчно найбільшого і найменшого головних напружень

$$\sigma_{\text{еквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (9.16)$$

9.4. Критерій питомої потенційної енергії формозмінення (четверта теорія міцності)

В якості критерію міцності в цьому випадку приймають кількість питомої потенційної енергії формозмінення, що накопичена деформованим елементом. Згідно цієї теорії, небезпечний стан (текучість) в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли питома потенційна енергія формозмінення досягає свого граничного значення. Останнє можна легко визначити при простому розтягові в момент текучості.

Умова виникнення текучості

$$u_\phi = (u_\phi)_m \quad (9.17)$$

Умова міцності

$$u_\phi \leq [u_\phi] \quad (9.18)$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий впритул до виникнення граничного стану, можна потенційну енергію формозмінення в загальному випадку напруженого стану записати у вигляді

$$u_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (9.19)$$

При простому розтягові в момент текучості ($\sigma_1 = \sigma_m$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) маємо

$$(u_\phi)_m = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_m^2 \quad (9.20)$$

Тобто умова (9.17) після підстановки виразів (9.19) і (9.20) перетворюється так

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_m \quad (9.21)$$

або

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} = \sigma_m \quad (9.22)$$

Умова міцності буде наступна

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \leq \frac{\sigma_m}{n} = [\sigma] \quad (9.23)$$

Таким чином еквівалентне напруження по четвертій теорії

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad (9.24)$$

9.5. Критерій Мора

Критерій Мора заснований на припущенні, що міцність матеріалів в загальному випадку напруженого стану залежить головним чином від величини і знаку найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 головних напружень. Середнє по величині головне напруження, як вказувалось вище, лише незначно впливає на міцність. Виходячи із цього припущення, можна будь-який напружений стан зобразити одним кругом Мора, побудованим на головних напруженнях σ_1 і σ_3 .

Якщо при даних σ_1 і σ_3 міцність матеріалу порушується, то круг, побудований на цих напруженнях, називається *граничним*. Змінюючи співвідношення між головними напруженнями, отримаємо для даного матеріалу сімейство граничних кіл (рис. 9.1). Досліди показують, що по мірі переходу із області розтягу в область стиску опір руйнуванню збільшується. Цьому відповідає збільшення діаметрів граничних кіл по мірі руху ліворуч.

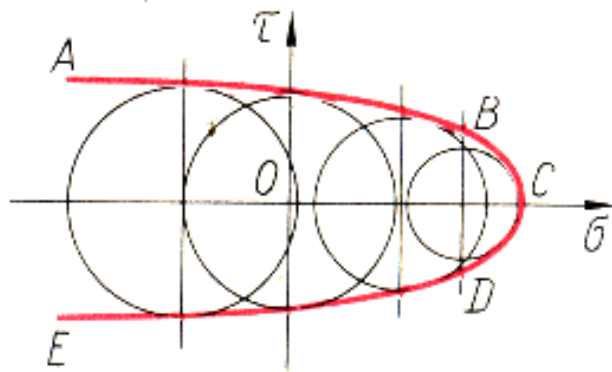


Рисунок 9.1 – Сімейство граничних кіл

Огинаюча ABCDE сімейства граничних кіл обмежує область міцності (рис. 9.1). Точка С відповідає всесторонньому рівномірному розтягу. Оскільки при рівномірному всесторонньому стиску матеріал здатен, не руйнуючись, витримувати дуже великі напруження, то огинаюча ліворуч залишається незамкнутою.

При наявності граничної огинаючої розрахувати міцність дуже просто. По знайденим в небезпечній точці деталі значенням головних напружень σ_1 і σ_3 будують круг. Міцність буде забезпечена, якщо він цілком буде розташований всередині огинаючої. Будемо збільшувати пропорційно величини головних напружень до тих пір, поки круг, що зображує даний напружений стан, торкнеться граничних огинаючих. Відношення радіусів отриманого таким чином граничного круга і початкового визначить коефіцієнт запасу.

На практиці зазвичай невелику ділянку огинаючої будують на основі двох дослідів – на розтяг і стиск, причому граничні криві заміняють прямими лініями, дотичними до кіл (рис. 9.2). Допустимий напружений стан можна

получити, зменшивши масштаб креслення в n раз (n – коефіцієнт запасу). На рис. 59.2 показано допустимий напружений стан для невеликої ділянки огинаючої.

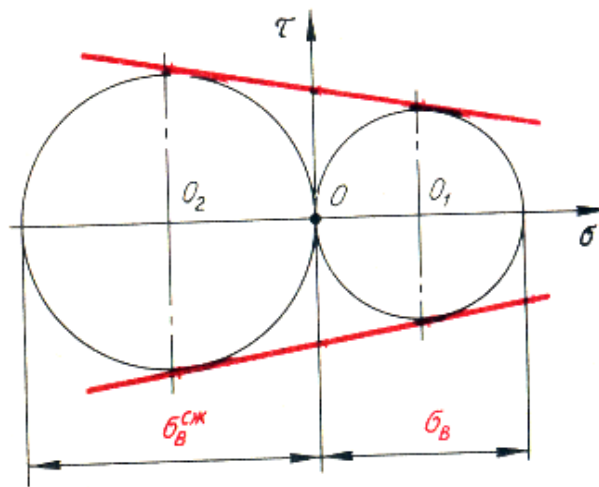


Рисунок 9.2 – Допустимий напружений стан для невеликої ділянки огинаючої

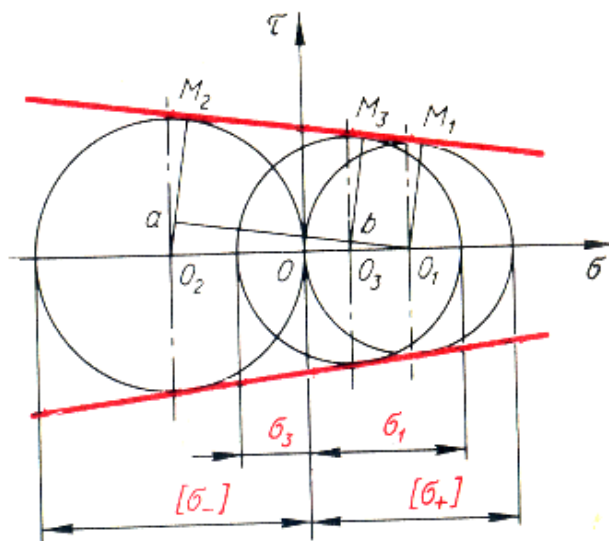


Рисунок 9.3 – Проміжний напружений стан (σ_1, σ_3), центр круга якого O_3 розташовується між точками O_1 і O_2

Легко отримати умову міцності для проміжного напруженого стану (σ_1, σ_3), центр круга якого O_3 розташовується між точками O_1 і O_2 (рис. 9.3).

Проведемо прямі O_1M_1 , O_2M_2 і O_3M_3 , що з'єднують центри і точки торкання кіл з огинаючими лініями, а також пряму $\overline{O_1a}$, паралельну $\overline{M_1M_2}$.

З подібності трикутників отримаємо наступні залежності

$$\frac{\overline{O_3b}}{\overline{O_2a}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}}, \text{ або } \frac{\overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1}}{\overline{O_2M_2} - \overline{O_1M_1}} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{\overline{OO_1} - \overline{OO_2}} \quad (9.25)$$

Замінивши відрізки ліній значеннями відповідних напружень, будемо мати

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]} \quad (9.26)$$

Після перетворення, ввівши знак нерівності, отримуємо умову міцності

$$\sigma_{еквМ} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+] \quad (9.27)$$

Запитання для самоперевірки

1. Яка мета теорій міцності? В чому їх суть?
2. Які теорії придатні для розрахунку пластичних матеріалів, а які для крихких?

10. ЗСУВ

10.1. Поняття про зсув

Зсув – вид опору стержня коли в його поперечних перерізах виникає тільки поперечне зусилля.

Деформація зсуву в металах називається зрізом, в камені і дереві – сколюванням.

Зсув викликається дією на стержень двох рівних протилежно направлених поперечних зусиль, розташованих на малій відстані одна від одної (рис.10.1).

Деформації зсуву зазнають заклепки, болти, встановлені без зазору, шпонки, шви зварних з'єднань, прутки і листи при різанні їх ножицями.

Зсув в чистому вигляді отримати важко, так як він супроводжується другими видами деформацій (як правило згином). Однак в розрахунках зустрічаються випадки навантажень, коли на чотирьох гранях елементарного прямокутного елемента, виділеного коло деякої точки перерізу стержня, діють тільки дотичні напруження. Такий вид деформацій називають чистим зсувом.

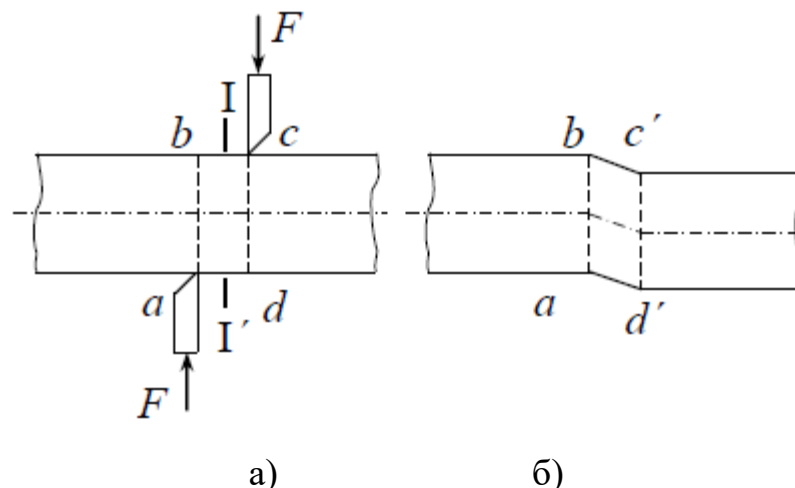


Рисунок 10.1 – Різання бруса: *a* – розрахункова схема;

б – деформований стан бруса

Прикладом деформації чистого зсуву є скручування тонкостінної труби (рис. 10.2). При скручуванні її твірні нахилиються через відносний поворот поперечних перерізів стержня, а стінки труби зазнають деформацію зсуву.

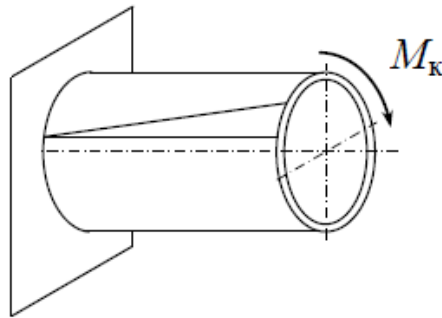


Рисунок 10.2 – Чистий зсув при крученні тонкостінної труби

10.2. Дотичні напруження. Умови міцності

На ділянці бруса між силами F в довільному перерізі I – I' (див. рис. 10.1 а) діє поперечне зусилля Q , яке визначається за методом перерізів і дорівнює

$$Q = F. \quad (10.1)$$

Поперечне зусилля Q являється рівнодіючою елементарних дотичних сил τdA , що діють в поперечному перерізі. Для визначення дотичних напружень по відомому значенню поперечного зусилля необхідно знати закон їх розподілу по перерізу стержня.

Звичайно приймається, що напруження розподіляються рівномірно. Формула для визначення дотичних напружень:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}, \quad (10.2)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

При зсуві заклепкових з'єднань, болтів, шпонок і других деталей крім дотичних напружень в перерізах через згин виникають нормальні напруження. Однак, якщо нормальні напруження значно менші дотичних, то в наближених розрахунках враховують тільки дотичні напруження і розрахунок проводять як для випадку чистого зсуву.

Умова міцності на зсув:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau_c], \quad (10.3)$$

де $[\tau_c]$ – допустиме напруження матеріалів на зсув.

Звичайно допустиме напруження на зсув приймається як доля допустимого напруження на розтяг:

- для пластичних матеріалів $[\tau_c] = (0.5 \dots 0.6) [\sigma]$;
- для крихких матеріалів $[\tau_c] = (0.7 \dots 1.0) [\sigma]$.

10.3. Чистий зсув

При розрахунку низки елементів конструкцій зустрічається випадок плоского напруженого стану, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження (рис. 10.3, а). Такий напружений стан називається *чистим зсувом*.

Знайдемо величину і напрямки головних напружень при такому напруженому стані. Для цього скористаємося побудовою круга напружень (рис. 55, б). Оскільки в даному випадку

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0; \tau_\alpha = -\tau; \tau_\beta = \tau \quad (10.4)$$

то побудувавши круг напружень, знаходимо, що

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad (10.5)$$

а головні площадки нахилені до граней елемента під кутом 45° .

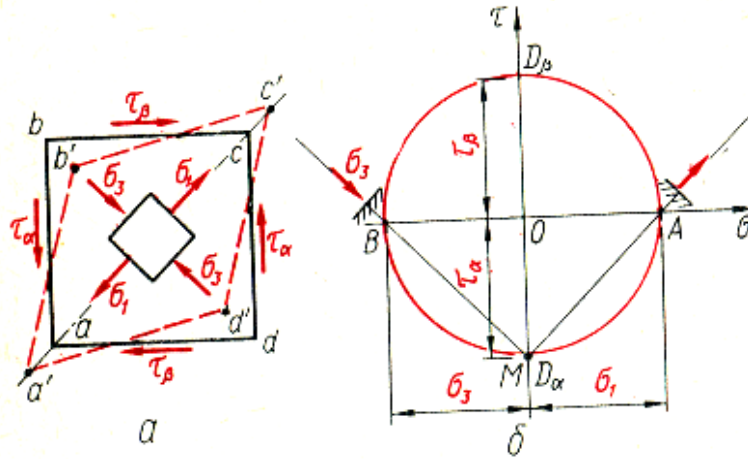


Рисунок 10.3 – Випадок плоского напруженого стану (а),
круг напружень (б)

Третя головна площадка співпадає з ненавантаженою фасадною граню елемента, відповідно

$$\sigma_2 = 0 \quad (10.6)$$

Деформація чистого зсуву характеризується зміною початково прямих кутів (рис. 10.4). Малий кут γ , на який змінюється початково прямий кут, називається *кутом зсуву* або *відносним зсувом*.

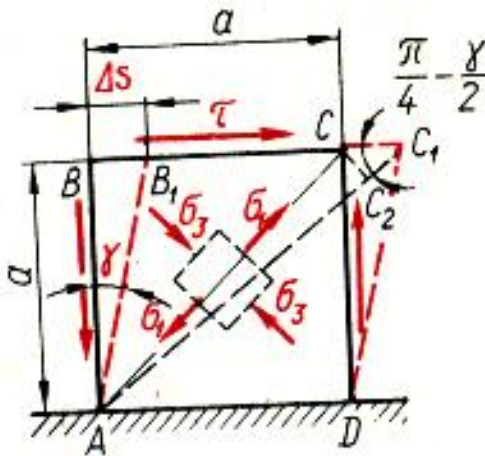


Рисунок 10.4 – Деформація чистого зсуву

Величину абсолютного зміщення грані Δs називають *абсолютним зсувом*.

Із трикутника $BA B_1$

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad (10.7)$$

Враховуючи малість кута

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (10.8)$$

тоді

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (10.9)$$

10.4. Закон Гука при чистому зсуві

Залежність між навантаженням і деформацією при зсуві можна прослідкувати по *діаграмі зсуву* (рис. 10.5).

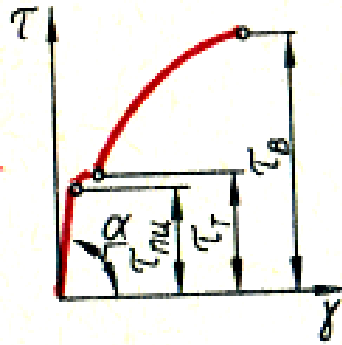


Рисунок 10.5 – Діаграма зсуву

Розглядаючи деформацію елемента (рис. 10.4) в межах пружності, знайдемо, що між відносним зсувом і дотичними напруженнями, що діють по граням елемента, згідно діаграмі зсуву (рис. 10.5), існує лінійна залежність, яка може бути виражена формулою

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ або } \tau = G\gamma \quad (10.10)$$

де G – коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності при зсуві або модулем пружності другого роду і вимірюється в МПа або Па.

По закону Гука для чистого зсуву $\gamma = \frac{\tau}{G}$, тому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G} \quad (10.11)$$

Тепер скористаємося узагальненим законом Гука. Головне напруження σ_1 діє в напрямку діагоналі АС (рис. 10.4). Тому відносне видовження ε діагоналі є головним видовженням ε_1 при плоскому напруженому

стані, представленим чистим зсувом. Враховуючи залежність (10.5) знаходимо, що

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{A} \tau \quad (10.12)$$

Порівнюючи формули (10.11) і (10.12), отримуємо шукану залежність

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (10.13)$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається деформацією зсуву?
2. Які внутрішні сили виникають при зсуві?
3. Які напруги виникають при зсуві?

11. ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

11.1. Основні поняття

Згин з крученням зустрічається найбільш часто при розрахунку валів круглого поперечного перерізу.

Розрахунок валу полягає, як правило, у визначенні необхідного діаметру (або діаметрів – якщо вал пустотілий) при заданому навантаженні, яке сприймається валом.

При одночасній дії згину і кручення в поперечному перерізі валу діють як дотичні, так і нормальні напруження, і матеріал знаходиться в плоскому напруженому стані. Для визначення розрахункового напруження в небезпечній точці використовують одну із теорій міцності. Частіше всього використовують III теорію найбільших дотичних напружень або IV – енергетичну теорію формозміни.

При крученні максимальні дотичні напруження виникають в кожній точці контуру перерізу. Тому при спільній дії кручення і згину небезпечними будуть дві точки перерізу вала, де одночасно з найбільшими дотичними напруженнями діють найбільші нормальні напруження (в одній точці – розтягуюче, а в другій – стискаюче).

З метою зменшення об'єму обчислень розрахункові напруження, визначають по формулам:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} z, \quad \tau = \frac{M_{кр}}{W_p}$$

і в даному випадку виражають через внутрішні сили і геометричну характеристику перерізу, враховуючи умови міцності по III і IV теоріях:

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{\sqrt{M^2 + M_{кр}^2}}{W_z}$$

або

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_{кр}^2}}{W_z}$$

де M – величина згинаючого моменту в небезпечному перерізі,

$M_{кр}$ – величина крутного моменту в небезпечному перерізі,

W_z – осьовий момент опору перерізу.

Так як у випадку круглого перерізу косий згин бруса неможливий, то для визначення небезпечного перерізу і значення M в цьому перерізі доцільно побудувати спочатку епюри згинаючих моментів M_z і M_y в горизонтальній і вертикальній площинах. Тоді ординати сумарної епюри згинаючих моментів визначаються як геометрична сума моментів M_z і M_y у відповідних перерізах.

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

Вектори M в різних перерізах знаходяться в різних площинах (які проходять через ось валу). Тому для зручності при побудові сумарної епюри їх умовно поєднують в площині креслення і знак згинаючого моменту не вказують.

Належить відмітити, що на ділянках, де прямі, які обмежують епюри M_z і M_y , перетинаються з віссю епюр в різних точках, епюра M обмежується кривою, орієнтованою опуклістю вниз (до осі).

Приклад

Стальний вал трансмісії робить n об/хв і передає через два ведених шківів потужності N_2 і N_3 , діаметри шківів $D_1=0.8\text{м}$, $D_2=0.6\text{м}$, $D_3=0.5\text{м}$, $a=1\text{м}$.

Визначити діаметр вала, якщо $[\sigma]=100\text{МН/м}^2$, $N_2=50\text{кВт}$, $N_3=30\text{кВт}$, $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_2=120^\circ$, $n=955\text{об/хв}$.

Визначаємо потужність на ведучому шківі:

$$N_1=N_2+N_3=50+30=80\text{кВт}.$$

Визначаємо крутні моменти, які виникають на кожному шківі:

$$M_{K1} = 9550 \frac{N_1}{n} = 9550 \cdot \frac{80}{955} = 800\text{Нм} = 0.8\text{кНм},$$

$$M_{K2} = 9550 \frac{N_2}{n} = 9550 \cdot \frac{50}{955} = 500\text{Нм} = 0.5\text{кНм},$$

$$M_{K3} = 9550 \frac{N_3}{n} = 9550 \cdot \frac{30}{955} = 300\text{Нм} = 0.3\text{кНм}.$$

Крутні моменти на окремих ділянках вала будуть:

На ділянці CD

$$M_{кр}=0.3\text{кНм}.$$

На ділянці DE

$$M_{кр}=0.8\text{кНм}.$$

По отриманим даним будемо епюру крутних моментів (рис. 11.2 б).

Розрахуємо тиск, який передається шківками на вал, вважаючи натяг ведучої гілки паса в два рази більшим, чим натяг веденої.

Розглянувши рис. 11.1 можна записати:

$$M_{ki} = T_i \frac{D_i}{2} - t_i \frac{D_i}{2},$$

але $T_i = 2t_i$

$$M_{ki} = 2t_i \frac{D_i}{2} - t_i \frac{D_i}{2},$$

звідки: $t_i = \frac{2 \cdot M_{ki}}{D_i},$

де t_i – натяг веденої гілки паса i -того шківa,

T_i - натяг ведучої гілки паса i -того шківa.

Тиск на вал запишеться так:

$$F_i = T_i + t_i = 2t_i + t_i$$

звідки: $F_i = 3t_i.$

Натяг веденої гілки паса кожного шківa буде:

$$t_1 = \frac{2 \cdot M_{K1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 0.8}{0.8} = 2 \text{кН},$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot M_{K2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 0.5}{0.6} = \frac{10}{6} \text{кН},$$

$$t_3 = \frac{2 \cdot M_{K3}}{D_3} = \frac{2 \cdot 0.3}{0.5} = 1.2 \text{кН}.$$

Визначаємо сили, які передаються на вал від натягу пасів:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{кН},$$

$$F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot \frac{10}{6} = 5 \text{кН},$$

$$F_3 = 3 \cdot t_3 = 3 \cdot 1.2 = 3.6 \text{кН}.$$

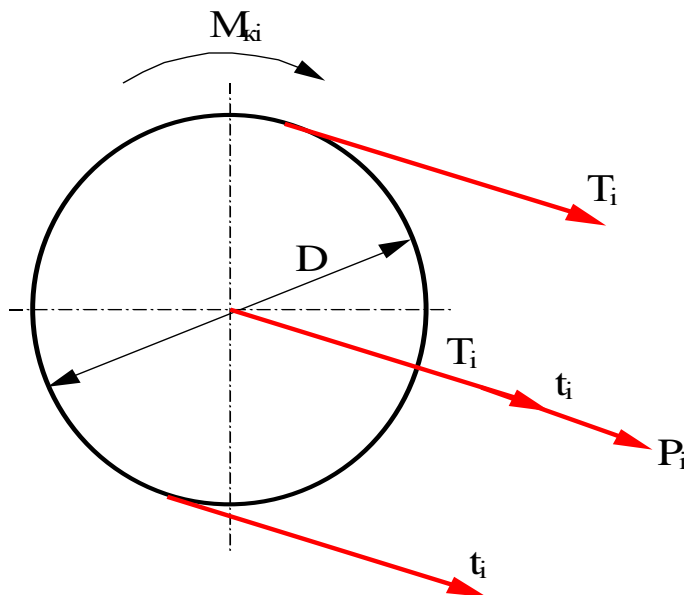
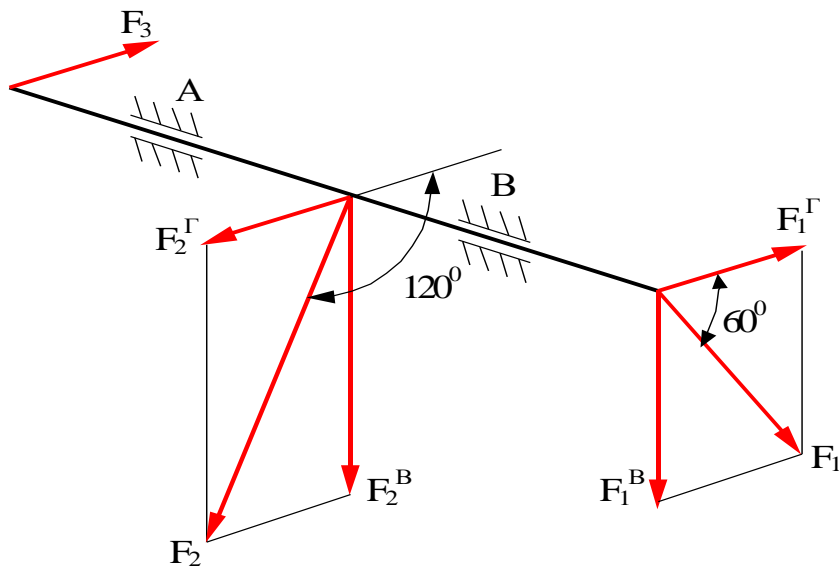


Рисунок 11.1 – Розташування зусиль, які діють на вал

На схемі в аксонометрії показуємо розташування зусиль, які діють на вал і розкладаємо їх на горизонтальні і вертикальні складові (рис. 11.1).

Визначаємо величину складових, які діють в горизонтальній (ось Z) площині:

$$F_1^\Gamma = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{кН} ,$$

$$F_2^\Gamma = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 5 \cdot \cos 120^\circ = -2.5 \text{кН} ,$$

$$F_3^{\Gamma} = F_3 = 3.6 \text{ кН}.$$

В вертикальній площині:

$$F_1^B = F_1 \cdot \sin 60^{\circ} = 6 \cdot \sin 60^{\circ} = 5.2 \text{ кН}$$

$$F_2^B = F_2 \cdot \cos 30^{\circ} = 5 \cdot \cos 30^{\circ} = 4.3 \text{ кН}$$

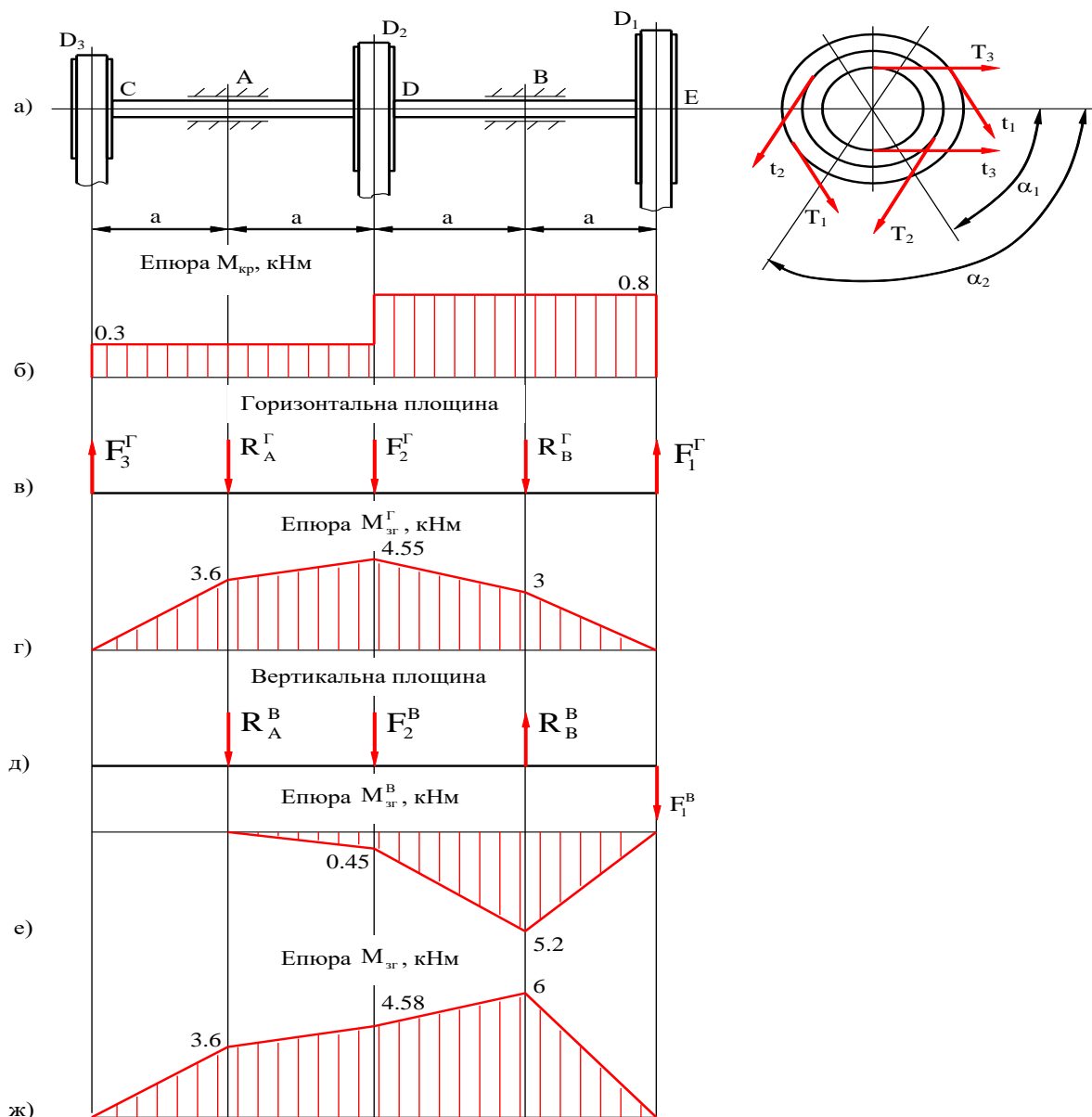


Рисунок 11.2 – Епюри

По отриманим даним будемо епюру згинаючих моментів від дії сил в горизонтальній і вертикальній площині (рис. 11.2 г, е).

Будемо сумарну епюру згинаючих моментів. Для цього знаходимо сумарні згинаючі моменти в характерних перерізах вала, як геометричну суму згинаючих моментів в вертикальній і горизонтальній площинах.

$$M_A = \sqrt{(M_A^{\Gamma})^2 + (M_A^B)^2} = \sqrt{3.6^2 + 0} = 3.6 \text{кНм},$$

$$M_D = \sqrt{(M_D^B)^2 + (M_D^{\Gamma})^2} = \sqrt{0.45^2 + 4.55^2} = 4.58 \text{кНм},$$

$$M_B = \sqrt{(M_B^{\Gamma})^2 + (M_B^B)^2} = \sqrt{3^2 + 5.2^2} = 6 \text{кНм}.$$

По епюрам $M_{кр}$ і $M_{зг}$ бачимо, що небезпечний переріз буде в точці В, так як в цьому перерізі найбільший згинаючий момент ($M_{зг}=6\text{кНм}$) і найбільший крутний момент ($M_{кр}=0.8\text{кНм}$).

Приведений момент по III теорії міцності:

$$M_{np}^{III} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{6^2 + 0.8^2} = 6.05 \text{кНм}.$$

Визначаємо діаметр вала, виходячи з умови міцності для небезпечного перерізу:

$$\sigma = \frac{M_{np}^{III}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

Момент опору для круглого перерізу:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}. \quad (11.2)$$

Підставляючи (11.2) в (11.1), отримаємо:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{III}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6.05 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0.0851 \text{ м.}$$

Приймаємо $d=90 \text{ мм}$.

Запитання для самоперевірки

1. Де зустрічається згин з крученням?
2. В чому полягає розрахунок при згині з крученням?
3. Які напруження діють в поперечному перерізі валу при згині з крученням?
4. Як визначається небезпечний переріз при згині з крученням?

12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ

12.1. Метод Мора

Найбільш загальною для визначення переміщень в стержнях є *формула Мора*. При наявності всіх шести компонентів внутрішніх зусиль, формула має вид

$$\Delta_{iF} = \sum \int_s \left[\frac{\bar{M}_i^z M_F^z}{EI_z} + \frac{\bar{M}_i^y M_F^y}{EI_y} + \frac{\bar{M}_i^x M_F^x}{GI_k} + k_z \frac{\bar{Q}_i^z Q_F^z}{GA} + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_F^y}{GA} + \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} \right] ds \quad (12.1)$$

де k_y, k_z – коефіцієнти, які залежать від форми перерізу

В більшості випадків при визначенні переміщень в балках, рамах і арках по методу Мора в формулі (12.1) можна знехтувати впливом повздовжніх деформацій і зсуву, враховуючи тільки переміщення, які викликаються згином. Тоді формула (12.1) для плоскої системи може бути записана наступним чином:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i M_F ds}{EI}$$

Порядок визначення переміщень по методу Мора.

1. Будується допоміжна система і навантажується одиничним навантаженням в точці, де необхідно визначити переміщення. При визначенні лінійних переміщень в заданому напрямку прикладається одинична сила, при визначенні кутових переміщень – одиничний момент.

2. Для кожної ділянки системи виписується вираз силових факторів в довільному перерізі заданої (M_F, N_F, Q_F) і допоміжної ($\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$) систем.
3. Розраховуються по всім ділянкам системи інтеграли Мора.
4. Якщо розраховане переміщення має додатній знак, то це значить, що його напрямок співпадає з напрямком одиничної сили. Від'ємний знак вказує на те, що дійсне переміщення протилежне напрямку одиничної сили.

12.2. Спосіб Верещагіна

Інтеграл Мора $\int \bar{M}_i M_F dx$ для випадку, коли еюра від заданого навантаження має довільний, а від одиничного – прямолінійний обрис (рис.12.1), виявилось зручним визначати графоаналітичним способом, запропонованим А.Н. Верещагіним.

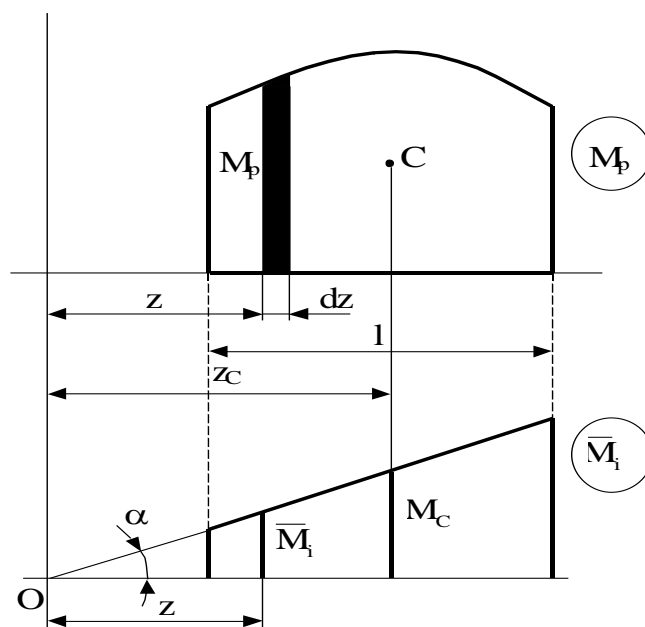


Рисунок 12.1 – Графоаналітичний спосіб визначення переміщень А.Н. Верещагіна

Загальна формула переміщень для систем, які складаються з прямолінійних елементів запишеться у вигляді

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_c}{EI},$$

де Ω - площа епюри M_F від зовнішнього навантаження;

\bar{M}_c - ордината епюри від одиничного навантаження під центром ваги епюри M_F .

Це і є *формула Верещагіна*. Розрахунок по цій формулі виконується по ділянкам, на кожній з яких прямолінійна епюра повинна бути без переломів (рис. 12.2).

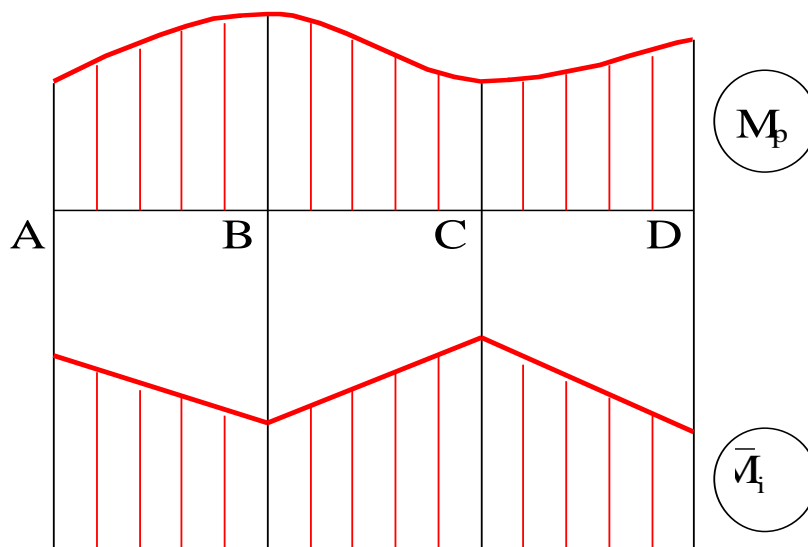


Рисунок 12.2 – Окреслення епюр до застосування формули Сімпсона-Корноухова

У випадку, коли епюри M_F окреслені по квадратній параболі або прямій, а \bar{M}_i - по прямій, ефективно застосування *формули Сімпсона-Корноухова*

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{l}{6EI} \left(\bar{M}_i^{л6} M_F^{л6} + 4\bar{M}_i^{cp} M_F^{cp} + \bar{M}_i^{np} M_F^{np} \right),$$

де $\bar{M}_i^{лв}, M_F^{лв}$ - крайні ліві ординати епюр, які перемножуються,
 $\bar{M}_i^{сп}, M_F^{сп}$ - середні ординати епюр, які перемножуються,
 $\bar{M}_i^{пр}, M_F^{пр}$ - крайні праві ординати епюр, які перемножуються.

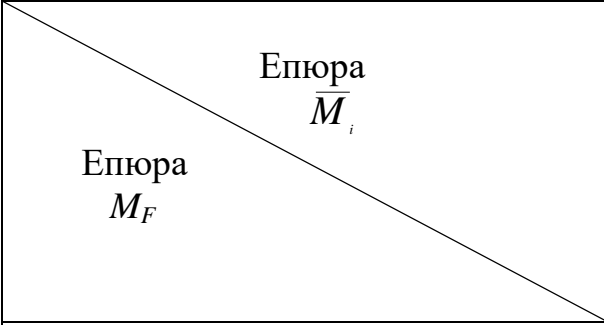
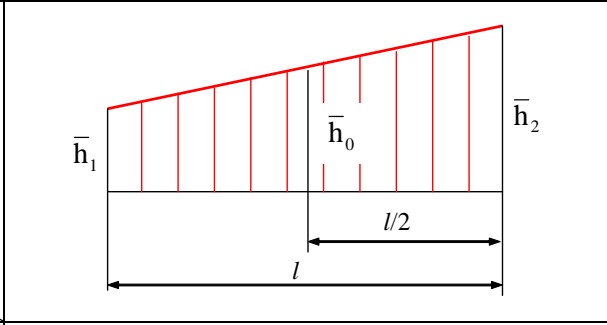
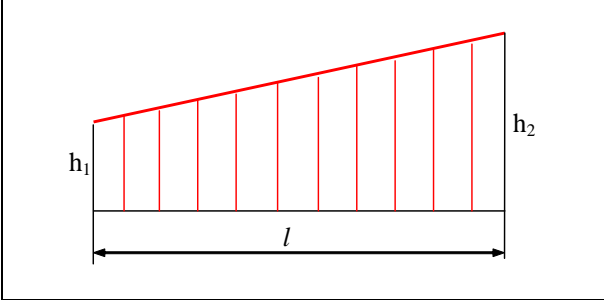
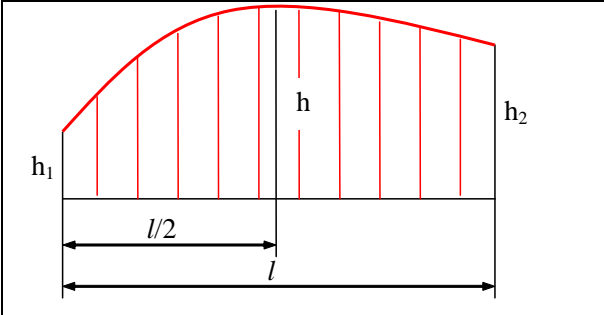
Приклад

Визначити прогин перерізу А і кут повороту перерізу В для заданої консольної балки (рис.12.3,а).

Дано: $l=3м; q=4т/м; F=\frac{ql}{2}; M=ql^2; E=2 \cdot 10^5 МПа$ (додаток 4).

Двутавр №40: $I_z=19062см^4$ (додаток

Таблиця 12.1. Вирази інтегралу Мора $\int \bar{M}_i M_F dx$ для різних сполучень епюр \bar{M}_i і M_F (l – основа площі епюри)

<p>Епюра \bar{M}_i</p> <p>Епюра M_F</p> 	
	$\Delta = \frac{l}{6EI} [2h_1\bar{h}_1 + 2h_2\bar{h}_2 + h_1\bar{h}_2 + h_2\bar{h}_1]$
	$\Delta = \frac{l}{6EI} [h_1\bar{h}_1 + 4h\bar{h}_0 + h_2\bar{h}_2]$

1. Метод Мора.

Розрахункову схему балки викреслюють в масштабі (рис. 12.3 а) і розбивають на ділянки АВ, ВС, СD.

Прогин (переріз А) балки визначають методом Мора. Поставлену задачу розв'язують у певні послідовності.

Будують допоміжну систему, яку навантажують одиничним навантаженням в точці, де необхідно визначити переміщення. В нашому прикладі визначають лінійне переміщення, тому в точці А прикладають одиничну силу (рис. 12.3 б).

Для кожної ділянки системи виписують вирази силових факторів в довільному перерізі заданої M_F і допоміжної \bar{M}_i систем:

$$\text{Ділянка АВ: } 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{F1} = 0,$$

$$\bar{M}_1 = -\bar{X} \cdot x_1 = -1 \cdot x_1 = -x_1$$

$$\text{Ділянка ВС: } 0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{F2} = -F \cdot x_2 = -\frac{ql}{2} \cdot x_2$$

$$\bar{M}_2 = -\bar{X} \cdot \left(\frac{l}{2} + x_2\right) = -1 \cdot \left(\frac{l}{2} + x_2\right) = -\frac{l}{2} - x_2$$

$$\text{Ділянка СD: } 0 \leq x_3 \leq l$$

$$M_{F3} = -F \cdot \left(\frac{l}{2} + x_3\right) + M - \frac{qx_3^2}{2} = -\frac{ql}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + x_3\right) + ql^2 - \frac{qx_3^2}{2}$$

$$\bar{M}_3 = -\bar{X} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} + x_3\right) = -1 \cdot (l + x_3) = -l - x_3$$

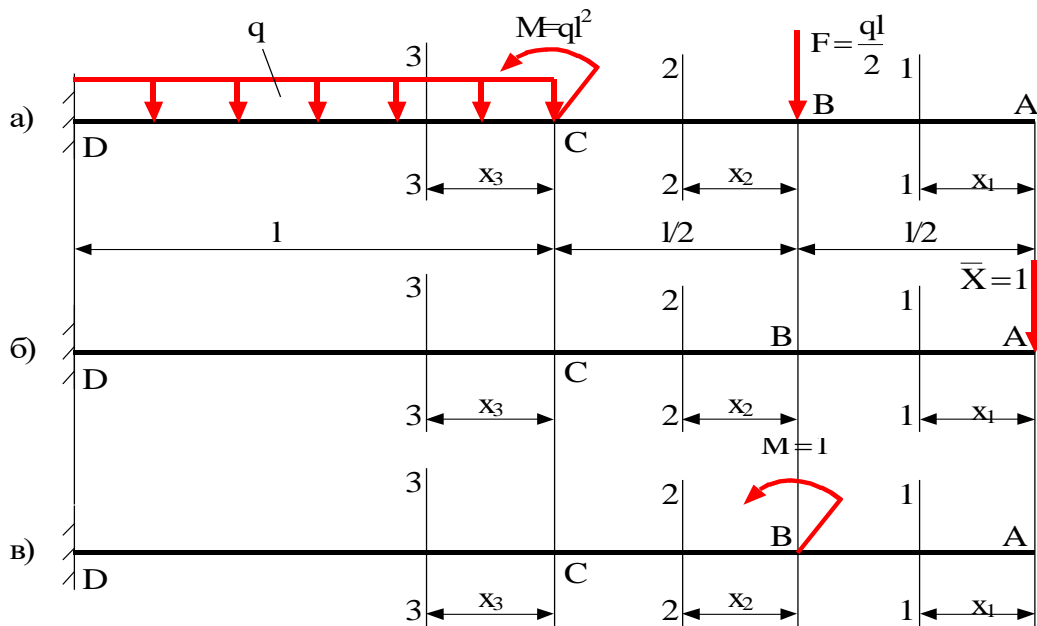


Рисунок 12.3 – Задана балка (а), балка навантажена одиначною силою (б), балка навантажена одиначним моментом(в)

Визначають лінійне переміщення перерізу А за допомогою інтеграла Мора (по ділянках в межах всієї консольної балки).

$$\begin{aligned}
 \Delta_A &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{F1} \cdot \bar{M}_1}{EI_z} dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{F2} \cdot \bar{M}_2}{EI_z} dx_2 + \int_0^l \frac{M_{F3} \cdot \bar{M}_3}{EI_z} dx_3 = \\
 &= \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_{F1} \cdot \bar{M}_1 dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} M_{F2} \cdot \bar{M}_2 dx_2 + \int_0^l M_{F3} \cdot \bar{M}_3 dx_3 \right] = \\
 &= \frac{1}{EI_z} \left[0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{ql}{2} \cdot x_2 \right) \cdot \left(-\frac{l}{2} - x_2 \right) dx_2 + \int_0^l \left(-\frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} + x_3 \right) + ql^2 - \frac{qx_3^2}{2} \right) \cdot \left(-l - x_3 \right) dx_3 \right] = \\
 &= -\frac{35}{96} \cdot \frac{ql^4}{EI_z} = -\frac{35}{96} \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} = -0.031 \text{ м} = -3.1 \text{ см}
 \end{aligned}$$

На ділянці АВ інтеграл Мора дорівнює нулю, так як згинаючий момент від зовнішніх навантажень на цій ділянці дорівнює нулю. Розраховане лінійне переміщення має від'ємний знак, отже його напрямок не співпадає з напрямком одиначної сили.

Знаходимо кут повороту перерізу В. Для цього в перерізі В прикладаємо одиничний момент $\bar{M}_1 = 1$ і запишемо вирази для M_{Fi} і \bar{M}_i

$$\text{Ділянка АВ: } 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{F1} = 0,$$

$$\bar{M}_1 = 1$$

$$\text{Ділянка ВС: } 0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{F2} = -F \cdot x_2 = -\frac{ql}{2} \cdot x_2$$

$$\bar{M}_2 = 1$$

$$\text{Ділянка CD: } 0 \leq x_3 \leq l$$

$$M_{F3} = -F \cdot \left(\frac{l}{2} + x_3 \right) + M - \frac{qx_3^2}{2} = -\frac{ql}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + x_3 \right) + ql^2 - \frac{qx_3^2}{2}$$

$$\bar{M}_3 = 1$$

Кут повороту перерізу В

$$\begin{aligned} \theta_B &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{F1} \cdot \bar{M}_1}{EI_z} dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{F2} \cdot \bar{M}_2}{EI_z} dx_2 + \int_0^l \frac{M_{F3} \cdot \bar{M}_3}{EI_z} dx_3 = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_{F1} \cdot \bar{M}_1 dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} M_{F2} \cdot \bar{M}_2 dx_2 + \int_0^l M_{F3} \cdot \bar{M}_3 dx_3 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{ql}{2} \cdot x_2 \right) \cdot 1 dx_2 + \int_0^l \left(-\frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} + x_3 \right) + ql^2 - \frac{qx_3^2}{2} \right) \cdot 1 dx_3 \right] = \\ &= \frac{13}{48} \cdot \frac{ql^3}{EI_z} = \frac{13}{48} \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} = 7.67 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \end{aligned}$$

Розрахований кут повороту має додатній знак, отже напрямок повороту перерізу співпадає з напрямком одиничного моменту.

2. Спосіб Верещагіна.

Будуємо епюру згинаючих моментів M_F від заданого навантаження (вантажну). Вона представлена на рис. 12.4 б. В тому перерізі, де необхідно визначити прогин, прикладаємо одиничну силу $\bar{X} = 1$ (рис. 12.4 в) і будуємо від неї одиничну епюру згинаючих моментів \bar{M}_1 (рис. 12.4 г). Виконуючи перемноження вантажної епюри M_F і одиничної епюри \bar{m}_1 отримаємо лінійне переміщення перерізу А:

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{l}{6EI_z} \left[2 \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot l + 2 \cdot 0 \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} + l \cdot 0 \right] + \\ &+ \frac{l}{6EI_z} \left[-\frac{3ql^2}{4} \cdot l - 4 \cdot \frac{3ql^2}{8} \cdot 1.5l + \frac{ql^2}{4} \cdot 2l \right] = \\ &= -\frac{35}{96} \cdot \frac{ql^4}{EI_z} = -\frac{35}{96} \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} = -0.031 \text{ м} = -3.1 \text{ см} \end{aligned}$$

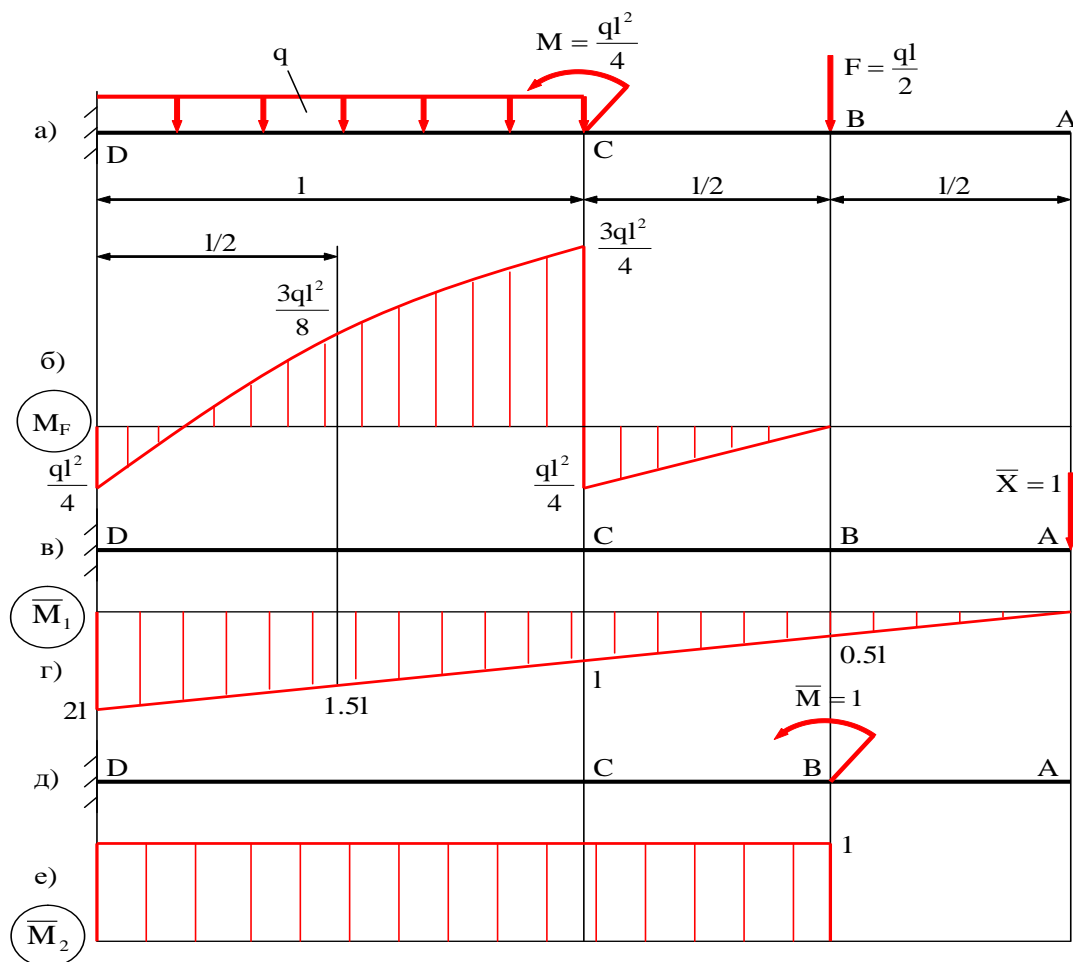


Рисунок 12.4 – Задана балка (а), епюра згинаючих моментів від заданого навантаження (б), балка навантажена одиничною силою (в), епюра згинаючих моментів від прикладеної одиничної сили (г), балка навантажена одиничним моментом (д), епюра згинаючих моментів від прикладеного одиничного моменту

В тому перерізі де необхідно визначити кут повороту прикладаємо одиничний момент $\bar{M} = 1$ (рис. 12.4 д) і будуємо від нього одиничну епюру згинаючих моментів \bar{m}_2 (рис. 12.4 е). Виконуючи перемноження вантажної епюри M_F і одиничної епюри \bar{m}_2 отримаємо кут повороту перерізу В:

$$\theta_B = -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 \right] + \frac{l}{6EI_z} \left[\frac{3ql^2}{4} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{3ql^2}{8} \cdot 1 - \frac{ql^2}{4} \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{13}{48} \cdot \frac{ql^3}{EI_z} = \frac{13}{48} \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} = 7.67 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Запитання для самоперевірки

1. В чому полягає метод Мора для визначення переміщень?
2. Як проводиться перемноження епюр за правилом Верещагіна при визначенні переміщень балки?

13. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ

13.1. Основні поняття

Статично невизначеними називаються системи, силові фактори в елементах яких не можуть бути визначені тільки з рівнянь рівноваги твердого тіла. В таких системах зв'язків більше, чим це необхідно для рівноваги. Таким чином, частина зв'язків є зайвою, а відповідні зусилля є *зайвими невідомими*. По числу зайвих зв'язків або зайвих невідомих зусиль встановлюють *ступінь статичної невизначеності системи*.

Ступінь статичної невизначеності плоских систем може бути визначена по формулі

$$s=3k-ш$$

де k – число замкнутих контурів,

$ш$ – число шарнірів в перерахунку на поодинокі.

Основа (земля) розглядається як стержень нескінченної жорсткості ($EI=\infty$).

При розрахунку статично невизначених систем можна в якості невідомих приймати як сили або силові фактори, так і переміщення або деформаційні фактори. В першому випадку маємо так званий *метод сил*, в другому – *метод переміщень*.

Розрахунок по методу сил проводять в такій послідовності.

1. Встановлюють ступінь статичної невизначеності.

2. Шляхом видалення зайвих зв'язків замінюють початкову систему статично визначеною, яка називається *основною системою*. Таких систем можна побудувати кілька, тому необхідно додержуватись при цьому умови їх геометричної незмінності.

3. Основну систему навантажують заданими зовнішніми силами і зайвими невідомими зусиллями, які замінюють дію видалених зв'язків, в результаті чого отримують *еквівалентну систему*.

4. Для забезпечення еквівалентності початкової і основної систем невідомі зусилля повинні бути підбрані так, щоб деформації основної системи не відрізнялись від деформацій початкової статично невизначеної системи. Для цього переміщення точок прикладення зайвих невідомих по напрямку їх дії прирівнюють до нуля. З отриманих таким чином рівнянь визначають значення зайвих невідомих зусиль. Визначення переміщень відповідних точок можна виконувати будь-яким способом, однак краще використовувати при цьому найбільш загальний метод Мора.

Додаткові рівняння переміщень, які виражають рівність нулю переміщень по напрямку зайвих невідомих, зручно складати в так звані *канонічній формі*, тобто по визначеній закономірності.

Рівняння переміщень для будь-якої n раз статично невизначеної системи в канонічній формі можуть бути записані так

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{array} \right\}$$

Приклад

Для заданої статично невизначеної рами (рис. 13.1) побудувати епюри поперечних сил, осьових зусиль і згинаючих моментів, а також підібрати двутапковий переріз.

Допустиме напруження матеріалу рами $[\sigma]=160\text{МН}/\text{м}^2$, $a=1\text{м}$, $q=2\text{кН}/\text{м}$, $F=5\text{кН}$, $M=3\text{кНм}$.

Дана задача двічі статично невизначена, так як

$$S=3\kappa-\text{III}=3\cdot 2-4=2,$$

де S – ступінь статичної невизначеності рами,

$\kappa=2$ – число замкнутих контурів,

$\text{III}=4$ – число поодиноких шарнірів.

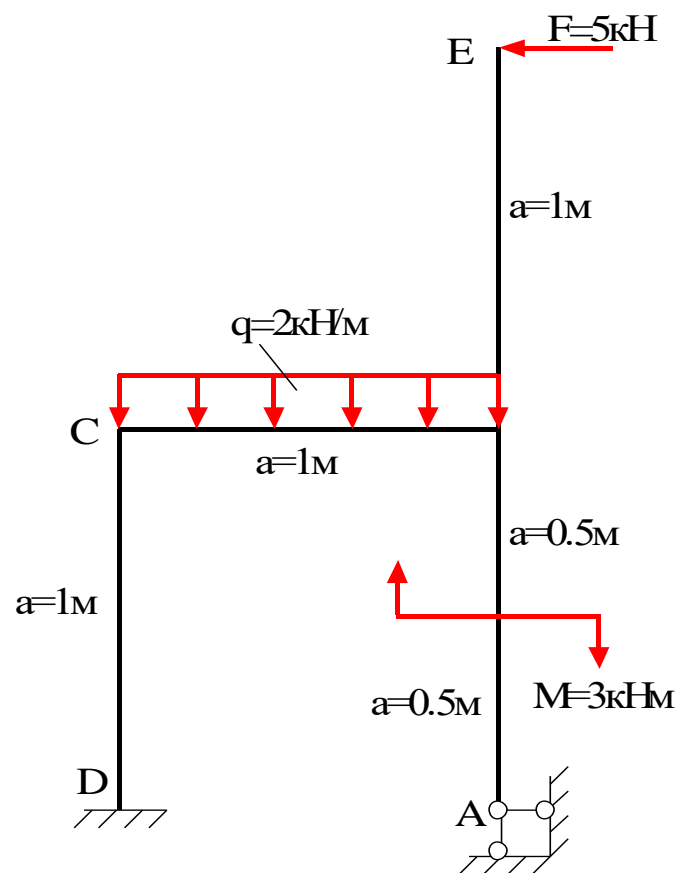


Рисунок 13.1 – Статично невизначена система

Із статично невизначеної системи шляхом видалення зв'язків отримуємо основну систему (тобто статично визначену і геометрично незмінну систему) (рис. 13.2 а).

Відкидаючи опору А і замінивши її дію на раму невідомими реакціями X_1 і X_2 , які прикладаємо в довільному напрямку, а також прикладаючи до основної системи зовнішні навантаження, отримуємо еквівалентну систему (рис. 13.2 б).

Для знаходження невідомих складаємо систему канонічних рівнянь:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0$$

Число рівнянь стільки, скільки невідомих X_1 і X_2 .

Перший індекс при коефіцієнтах показує напрямок переміщення, другий – причину переміщення.

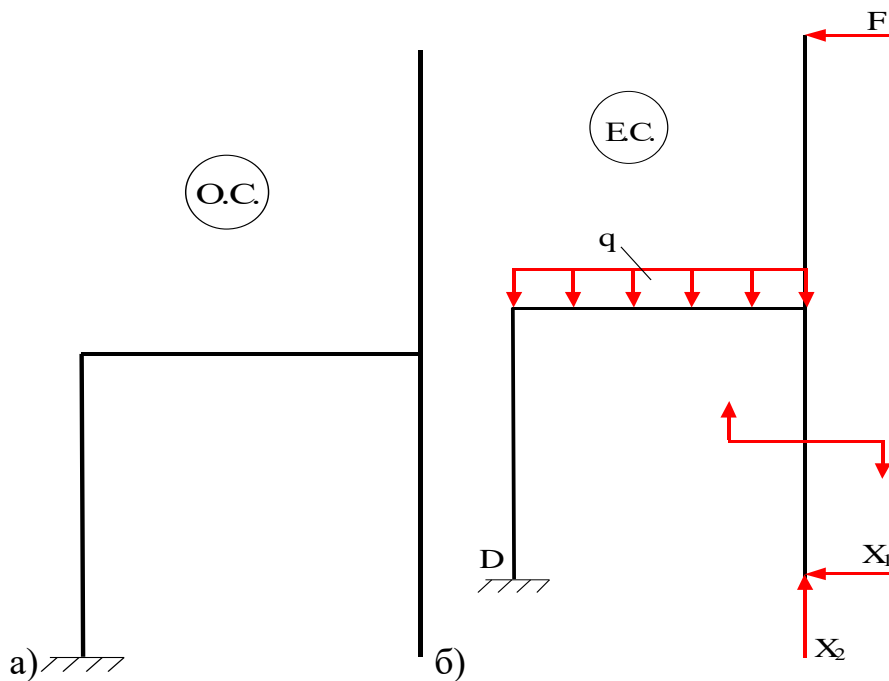


Рисунок 13.2 – Основна система (а), еквівалентна система (б)

Коефіцієнти і вільні члени рівнянь визначаються по формулі Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_x M_k dx}{EI_z}$$

Замінімо інтегрування перемноженням епюр по правилу Верещагіна (або Симпсона-Карнаухова). Для цього побудуємо епюри згинаючих моментів від одиничних сил $\bar{X}_1 = 1$ і $\bar{X}_2 = 1$, а також епюру M_F від зовнішнього навантаження.

Епюра згинаючих моментів від $\bar{X}_1 = 1$ і $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 13.3).

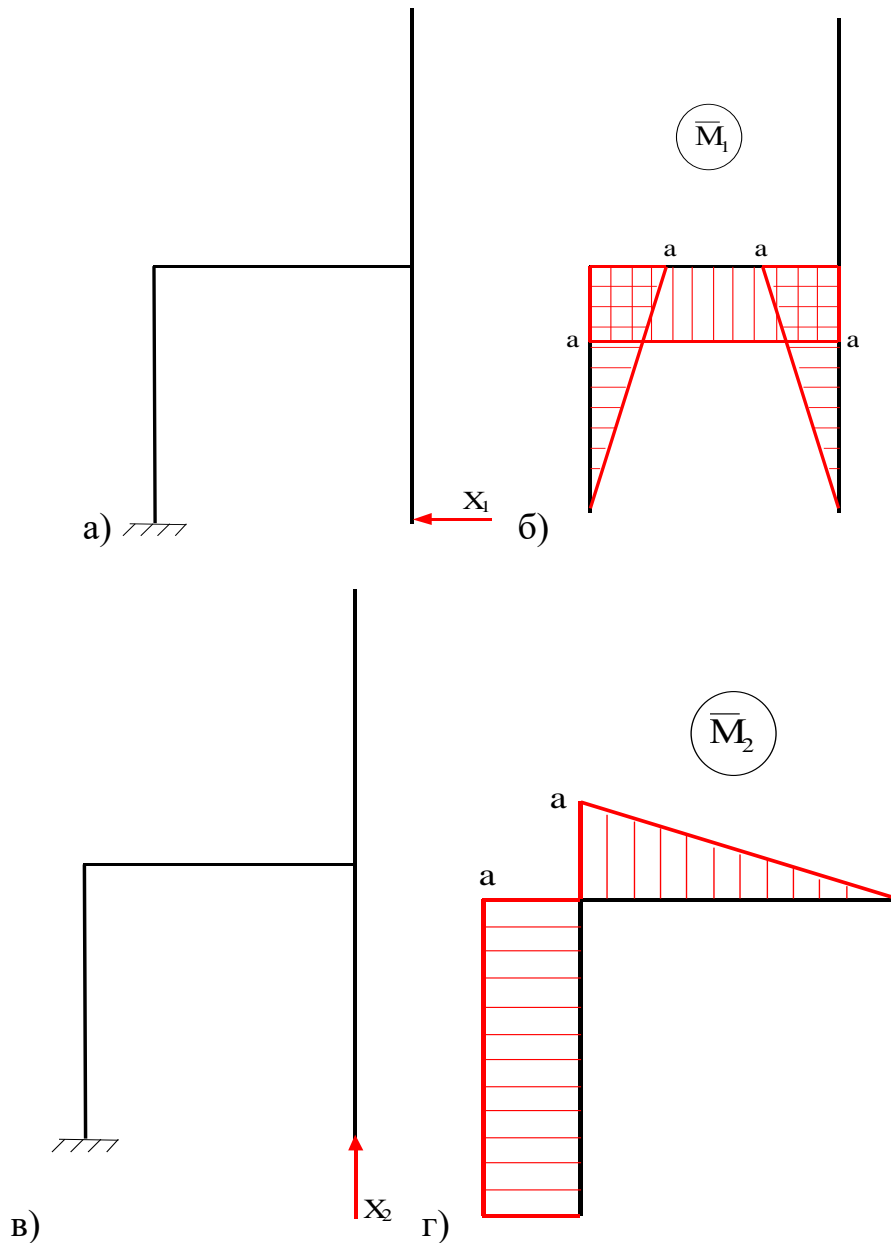


Рисунок 13.3 – Епюри згинаючих моментів від одиничного навантаження

Будуємо епюри згинаючих моментів від зовнішнього навантаження (рис. 13.4).

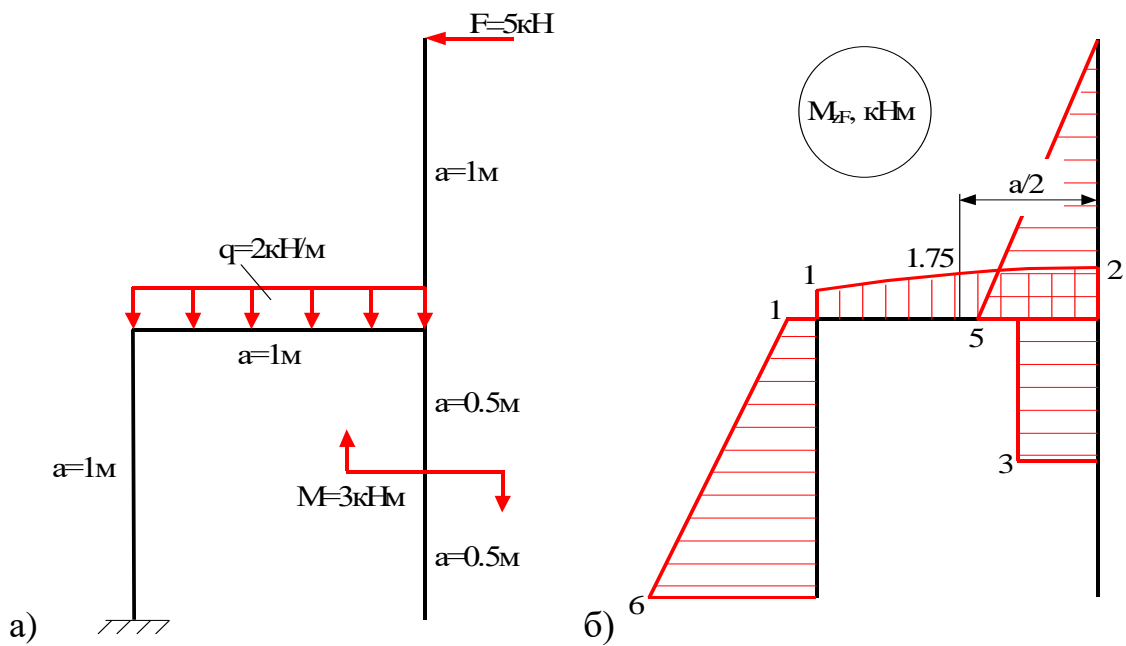


Рисунок 13.4 – Епюри згинаючих моментів від зовнішнього навантаження

Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_z} = 2 \cdot \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right] + \frac{1}{EI_z} [a \cdot a \cdot a] = \frac{5a^3}{3EI_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_z} = -\frac{1}{EI_z} \left[a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right] - \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \right] = -\frac{a^3}{EI_z},$$

$$\delta_{22} = \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right] + \frac{1}{EI_z} [a \cdot a \cdot a] = \frac{4a^3}{3EI_z}.$$

Вантажні члени рівнянь:

$$\Delta_{1F} = \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI_z} = \frac{a}{6EI_z} \left[2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 3 + 2 \cdot a \cdot 3 + a \cdot 3 + \frac{a}{2} \cdot 3 \right] -$$

$$- \frac{a}{6EI_z} [a \cdot 1 + 4 \cdot a \cdot 1.75 + a \cdot 2] - \frac{a}{6EI_z} [2 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 6 + a \cdot 6 + 0 \cdot 1] =$$

$$= - \frac{1.875a^2}{EI_z},$$

$$\Delta_{2F} = \frac{\bar{M}_2 M_F}{EI_z} = \frac{a}{6EI_z} \left[a \cdot 1 + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1.75 + 0 \cdot 2 \right] +$$

$$+ \frac{a}{6EI_z} [2 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot 6 + a \cdot 1 + a \cdot 6] = \frac{4.25}{EI_z}.$$

Підставляємо замість $a=1\text{м}$, отримаємо:

$$\delta_{11} = \frac{5}{3EI_z}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI_z}, \quad \delta_{22} = \frac{4}{3EI_z},$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1.875}{EI_z}, \quad \Delta_{2F} = \frac{4.25}{EI_z}.$$

Підставляємо в рівняння і скорочуючи на $\frac{1}{EI_z}$, запишемо:

$$X_1 \cdot \frac{5}{3} - X_2 \cdot 1 - 1.875 = 0,$$

$$- X_1 \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot X_2 + 4.25 = 0.$$

Розв'язуючи спільно систему рівнянь, знайдемо:

$$X_1 = -1.43 \text{кН}, \quad X_2 = -4.26 \text{кН}.$$

Знак мінус говорить про те, що напрямки реакцій X_1 і X_2 протилежні вибраним.

Будуємо сумарну епюру згинаючих моментів M_z , а також епюри поперечних сил Q_y і повздовжніх сил N (рис. 13.5).

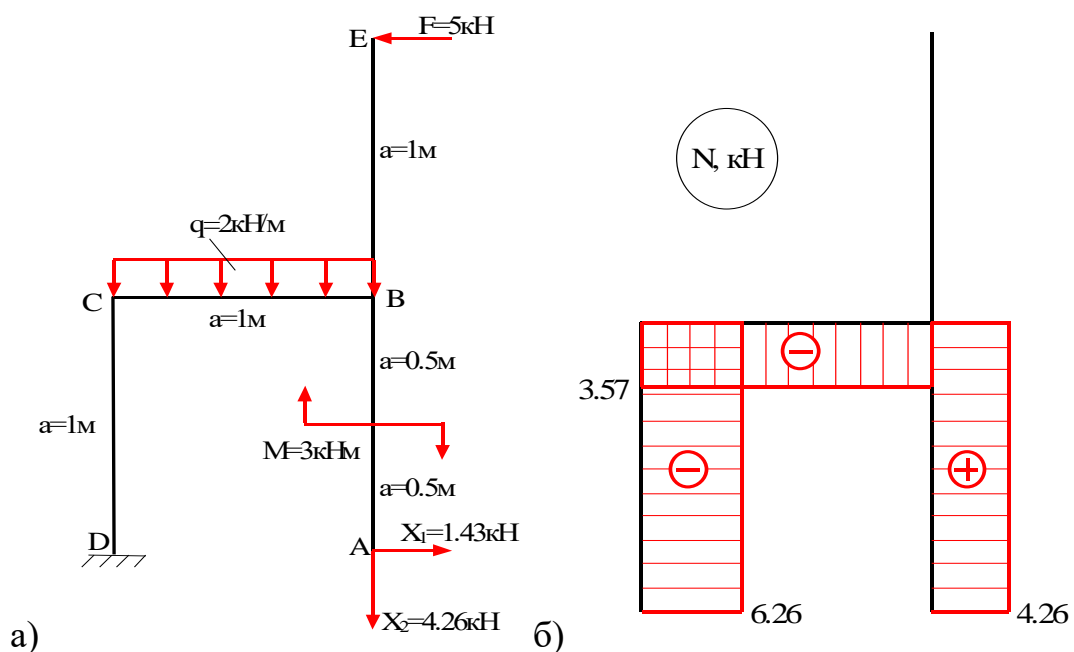
Деформаційна перевірка

Деформаційна перевірка виражає суть канонічних рівнянь, тобто

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_z} \int M_F \bar{M}_i dx = 0.$$

Визначимо переміщення Δ_1 від дії всіх сил в першому напрямку

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{EI_z} \int M_F \bar{M}_1 dx = \frac{a}{6EI_z} [-2 \cdot a \cdot 1.83 + 2 \cdot 0 \cdot 1.74 + 1.83 \cdot 0 + 1.74 \cdot a] + \\ & - \frac{a}{6EI_z} \left[2 \cdot a \cdot 1.57 + 2 \cdot 2.285 \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 2.285 + 1.57 \cdot \frac{a}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 0.715 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$



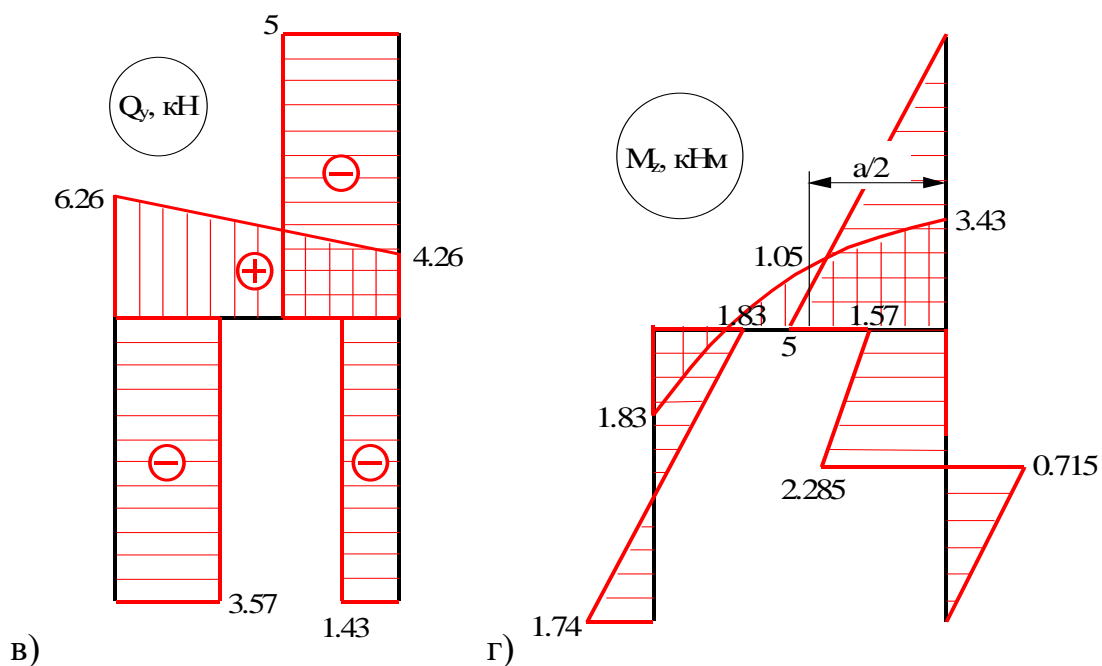


Рисунок 13.5 – Задана рама (а), епюра повздовжніх сил N (б), епюра поперечних сил Q_y (в), епюра згинаючих моментів M_z (г)

Аналогічно визначаємо переміщення у другому напрямку - Δ_2

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 = \frac{1}{EI_z} \int M_p \bar{M}_2 dx = \frac{a}{6EI_z} [-2 \cdot 1.83 \cdot a + 2 \cdot a \cdot 1.74 - 1.83 \cdot a + 1.74 \cdot a] + \\
 + \frac{a}{6EI_z} \cdot \left(-1.83 \cdot a + 3.43 \cdot 0 + 4 \cdot 1.05 \cdot \frac{a}{2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким чином статична невизначеність рами розкрита вірно.

Найбільший згинаючий момент виникає в точці В

$$M_{zmax} = 5 \text{кНм.}$$

Вважаючи жорсткість рами по довжині її ділянок постійною, з рівняння міцності визначимо момент опору

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{Z_{\max}}}{W_Z} \leq [\sigma],$$

$$W_Z = \frac{M_{Z_{\max}}}{[\sigma]} = \frac{5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3.125 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 31.25 \text{ см}^3.$$

В таблиці сортаменту вибираємо номер двутавра (ДЕСТ 8240-72) знаючи розрахунковий момент опору (додаток 6). Це буде двутавр №10, у якого $W_Z=34.8 \text{ см}^3$.

Запитання для самоперевірки

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Як визначається ступінь статичної невизначеності?
3. Як проводять розрахунок статично невизначених систем методом сил?
4. Як складаються додаткові рівняння переміщень?

14. РОЗРАХУНОК СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

14.1. Основні поняття

Пружна рівновага *стійка*, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається повернутися до початкового стану і повертається до нього після видалення зовнішнього впливу, який порушив початковий стан рівноваги (рис. 14.1 а). Пружна рівновага *нестійка*, якщо деформоване тіло, будучи виведено з нього будь-яким впливом, продовжує деформуватися в напрямку викликаного відхилення і після припинення впливу в початковий стан не вертається (рис. 14.1 в). Між цими двома станами рівноваги знаходиться перехідний стан, який називається *критичним*. При критичному стані деформоване тіло знаходиться в байдужій рівновазі: воно може зберігати початкову придану йому форму, але може і втратити її від самого незначного впливу (рис. 14.1 б).

Навантаження, перевищення якого викликає втрату стійкості початкової форми тіла, називається *критичним навантаженням*.

Досягнення навантаженнями критичних значень рівносильне руйнуванню конструкції. Для забезпечення запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялась умова

$$F \leq [F],$$

де F – діюче навантаження;

$[F]$ – допустиме навантаження, яке при коефіцієнті запасу стійкості n_y визначається так:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}.$$

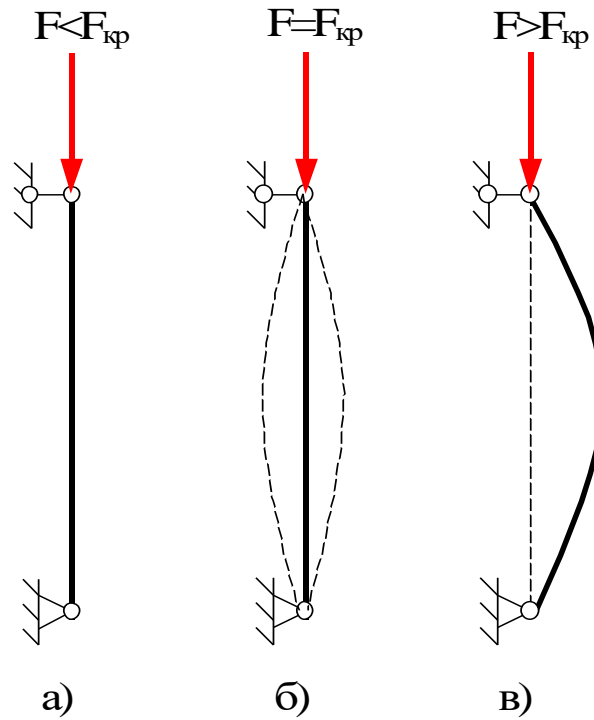


Рисунок 14.1 – Рівновага стержня: стійка (а), критична (б), нестійка (в)





Критична сила (при втраті стійкості в пружній стадії) розраховується по формулі Ейлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2},$$

де μ - коефіцієнт приведення довжини, який залежить від способу закріплення кінців стержня (таблиця 14.1),

I_{\min} – мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня.

Таблиця 14.1

Обидва кінці шарнірно закріплені, $\mu=1$	Один кінець жорстко защемлений, другий – вільний, $\mu=2$	Один кінець жорстко защемлений, другий – шарнірно закріплений, $\mu=0.7$	Обидва кінці защемлені, $\mu=0.5$
			

Напруження, які виникають в поперечному перерізі стержня при $F=F_{кр}$, називаються *критичними*:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

де $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ – гнучкість стержня,

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стержня.

Формула Ейлера застосовується при умові, що критичне напруження не перевищує межі пропорційності матеріалу стержня:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}.$$

Зазвичай умову прийнятності формули Ейлера виражають через гнучкість стержня:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{гран}},$$

де
$$\lambda_{\text{гран}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}.$$

Якщо втрата стійкості настає в пластичній стадії (формула Ейлера неприйнятна), то критичне напруження розраховують по емпіричній *формулі Ясінського*:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$$

де a, b – дослідні коефіцієнти, які залежать від матеріалу і які мають розмірність напруження.

Поряд з розрахунками по формулі Ейлера і емпіричним залежностям широке розповсюдження має розрахунок на стійкість, по формі аналогічні розрахунку на простий стиск.

Допустиме навантаження визначається по формулі

$$[F] = \varphi[\sigma_c]A,$$

де $[\sigma_c]$ – допустиме напруження на стиск для матеріалу стержня,

φ - коефіцієнт зниження основного допустимого напруження або коефіцієнт повздовжнього згину, який залежить від матеріалу стержня і його гнучкості (додаток 5).

Приклад

Для заданої стійки (рис. 14.2), схема закріплення кінців якої дана в двох проекціях, підібрати і розташувати вигідним чином її елементи, якщо допустиме напруження $[\sigma]=160\text{МН/м}^2$, матеріал елементів – ст.3. Елементи стійки приварені один до одного. Відомо, що $F=800\text{кН}$; $l=6\text{м}$; поперечний переріз: два двутавра.

Коефіцієнти приведення довжини μ в обох головних площинах стержня дорівнюють:

а) при згині в площині XOZ $\mu_y=1$

б) при згині в площині XOY $\mu_z=0.7$

Оскільки $\mu_y > \mu_z$ і гнучкість λ стержня прямо пропорційна коефіцієнту приведення довжини μ і зворотно пропорційна головному радіусу інерції перерізу i , для отримання рівногнучкої (найбільш економічної) стійки $\lambda_y \approx \lambda_z$, поперечний переріз необхідно розташувати так, щоб головні радіуси інерції перерізу знаходились в співвідношенні $i_y > i_z$, тобто можливо так, як показано на рис.14.2.

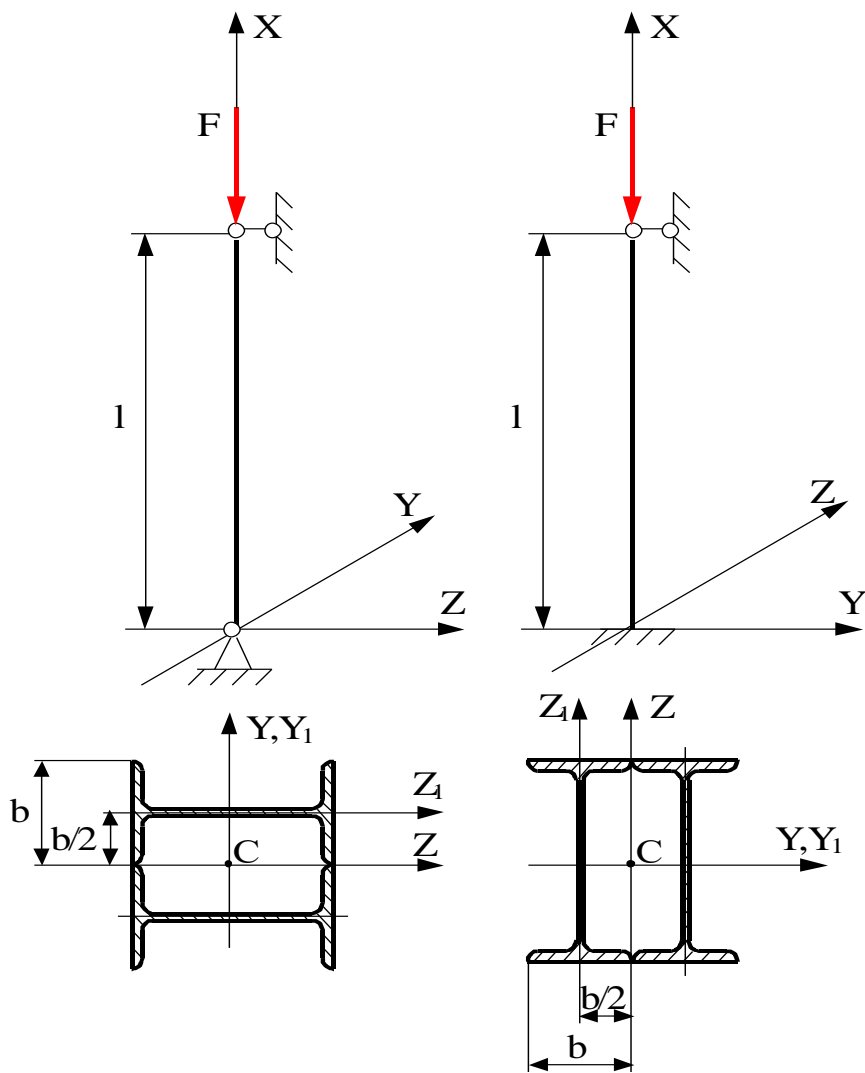


Рисунок 14.2 – Стійка

Для перевірки раціональності такого розташування перерізу приймемо довільно, наприклад, двутавр №24 і підрахуємо для нього значення i_y і i_z перерізу.

Для двутавра №24 (ДЕСТ 8239-72): $I_{z1}=198\text{см}^4$; $I_{y1}=3460\text{см}^4$; $A_1=34.8\text{см}^2$; $b=11.5\text{см}$; $i_{y1}=9.97\text{см}$. Тоді

$$I_z = 2 \left[I_{z1} + A_1 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[198 + 34.8 \left(\frac{11.5}{2} \right)^2 \right] = 2696 \text{см}^4,$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{2A_1}} = \sqrt{\frac{2696}{2 \cdot 34.8}} = 6.23 \text{см},$$

$$I_y = 2I_{y1} = 2 \cdot 3460 = 6920 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{2A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{2 \cdot 34.8}} = 9.97 \text{ см},$$

$$i_y = 9.97 \text{ см} > i_z = 6.23 \text{ см}.$$

Таким чином, переріз стійки орієнтований дійсно раціонально.

Гнучкість стійки в її головних площинах:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z \cdot l}{i_z} = \frac{0.7 \cdot 6 \cdot 10^2}{6.23} = 67.3,$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{9.97} = 60.2.$$

Отримавши $\lambda_y \approx \lambda_z$ (при заданому виді перерізу і способі закріплення кінців стержня добитися рівної гнучкості в обох площинах не можливо), ми забезпечили раціональне розташування перерізу.

Так як $\lambda_z > \lambda_y$ то розрахунок необхідно вести по λ_z , використовуючи практичну формулу

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]_c$$

звідки площа перерізу, яка вимагається

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]_c},$$

де φ - коефіцієнт повздожнього згину.

Так як значення φ заздалегідь не відомо, його величиною приходиться задаватися, визначати по ньому площу A , радіус інерції i , по ним фактичну гнучкість λ і значення коефіцієнту повздовжнього згину φ' , яке їй відповідає. Якщо значення φ і φ' узгоджуються в допустимих нормах (до 5%), то підібраний переріз (номер двутавра) можна вважати істинним. При цьому, так як величина φ знаходиться в межах від 0 до 1, в якості першого значення φ (першого наближення) найбільш ймовірно прийняти $\varphi_1=0.5...0.6$.

Якщо розходження φ і φ' виходить за межі норми, розрахунок в такі самі послідовності продовжують стільки раз (наближень), поки розходження значень φ_i і φ'_i не стане задовольняти нормі.

Розрахунок по такій схемі складає сутність методу послідовних наближень при розрахунках на повздовжній згин (на стійкість).

Переходимо до розрахунку заданої стійки.

Довільно задаємося якимось значенням коефіцієнту зменшення основного допустимого напруження φ .

I наближення ($\varphi_1=0.6$)

$$A' \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{cm}} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8.43 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 84.3 \text{ см}^2.$$

Площа одного двутавра повинна бути не менше:

$$A_1 = \frac{A'}{2} = \frac{84.3}{2} = 42.15 \text{ см}^2.$$

По ДЕСТу 8239-72 (додаток 6) приймаємо двутавр №27а, у якого: $I_y=337 \text{ см}^4$; $A_1=43.2 \text{ см}^2$; $b=13.5 \text{ см}$.

Момент інерції перерізу:

$$I'_z = 2 \left[I_y + A_1 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[337 + 43.2 \left(\frac{13.5}{2} \right)^2 \right] = 4615 \text{ см}^4.$$

Радіус інерції:

$$i'_z = \sqrt{\frac{I'_z}{2A_1}} = \sqrt{\frac{4615}{2 \cdot 43.2}} = 7.32 \text{ см}.$$

Гнучкість стійки:

$$\lambda'_z = \frac{\mu_z l}{i'_z} = \frac{0.7 \cdot 6 \cdot 10^2}{7.32} = 57.4.$$

Ці гнучкості в таблиці відповідає (додаток 5):

$$\varphi'_1 = 0.89 - \frac{0.89 - 0.86}{10} \cdot 7.4 = 0.868 \geq \varphi_1 = 0.6.$$

II наближення $\left(\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0.6 + 0.868}{2} = 0.73 \right),$

$$A'' \geq \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]_{cm}} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.73 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6.84 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 68.4 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = \frac{A''}{2} = \frac{68.4}{2} = 34.2 \text{ см}^2.$$

По ДЕСТу 8239-72 (додаток б) приймаємо двутавр №24, для якого:
 $I_y = 198 \text{ см}^4$; $A_1'' = 34.8 \text{ см}^2$; $b = 11.5 \text{ см}$.

Нами раніше підраховано для двутавра №24: $\lambda_y'' = 67.3$.

Ці гнучкості відповідає (додаток 5):

$$\varphi_2' = 0.823 \geq \varphi_2 = 0.73.$$

III наближення $\left(\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0.73 + 0.823}{2} = 0.78 \right),$

$$A''' \geq \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]_{cm}} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.78 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 64 \text{ см}^2.$$

Площа одного двутавра повинна бути не менше:

$$A_3 = \frac{A'''}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ см}^2.$$

По ДЕСТу 8239-72 (додаток 6) приймаємо двутавр №22а, у якого:
 $I_y = 206 \text{ см}^4$; $A_1''' = 32.8 \text{ см}^2$; $b = 12 \text{ см}$.

Момент інерції:

$$I_z''' = 2 \left[I_y + A_1''' \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[206 + 32.8 \left(\frac{12}{2} \right)^2 \right] = 2734 \text{ см}^4.$$

Радіус інерції:

$$i_z''' = \sqrt{\frac{I_z'''}{2A_1'''}} = \sqrt{\frac{2734}{2 \cdot 32.8}} = 6.5 \text{ см}.$$

Гнучкість стійки:

$$\lambda_z^m = \frac{\mu l}{i_z^m} = \frac{0.7 \cdot 6 \cdot 10^2}{6.5} = 64.6.$$

Ці гнучкості відповідає (додаток 5):

$$\varphi'_3 = 0.837 \geq \varphi_3 = 0.78.$$

IV наближення $\left(\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0.837 + 0.78}{2} = 0.81 \right),$

$$A^N \geq \frac{F}{\varphi_4 [\sigma]_{cm}} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.81 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6.17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 61.7 \text{ см}^2.$$

$$A_4 = \frac{61.7}{2} = 30.85 \text{ см}^2.$$

Ми бачимо, що по ДЕСТу 8239-72 (додаток 6) необхідно знову брати двутавр №22а, так як двутавр №22 має $A_1=30.6 \text{ см}^2$, що менше $A_4=30.85 \text{ см}^2$.

Перевіримо яке еквівалентне напруження буде виникати в стійці із двутавра №22а:

$$\sigma_3 \geq \frac{F}{\varphi'_3 \cdot 2A_1^m} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.837 \cdot 2 \cdot 32.8 \cdot 10^{-4}} = 147.5 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Недонапруження складе:

$$\frac{160 - 147.5}{160} \cdot 100\% = 7.8\% > 5\%.$$

Спробуємо взяти двутавр №22, у якого $A_1^N = 30.6 \text{ см}^2$; $I_y=157 \text{ см}^4$;
 $b=11 \text{ см}$; $i_y=9.13 \text{ см}$.

$$I_z^{IV} = 2 \left[I_y + A_1^{IV} \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[157 + 30.6 \left(\frac{11}{2} \right)^2 \right] = 2140 \text{ см}^4.$$

Радіус інерції:

$$i_z^{IV} = \sqrt{\frac{I_z^{IV}}{2A_1^{IV}}} = \sqrt{\frac{2140}{2 \cdot 30.6}} = 5.96 \text{ см}.$$

Гнучкість:

$$\lambda_z^{IV} = \frac{\mu l}{i_z^{IV}} = \frac{0.7 \cdot 6 \cdot 10^2}{5.96} = 70.5.$$

Що відповідає:

$$\varphi_4' = 0.807.$$

Еквівалентне напруження буде:

$$\sigma_e \geq \frac{F}{\varphi_4' \cdot 2A_1^{IV}} = \frac{800 \cdot 10^3}{0.807 \cdot 2 \cdot 30.6 \cdot 10^{-4}} = 164 \cdot 10^6 \text{ Па} = 164 \text{ МПа},$$

$$\sigma_e = 164 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{ст}} = 160 \text{ МПа}.$$

Перенапруження складає:

$$\frac{164 - 160}{160} \cdot 100\% = 2.5\% < 5\%.$$

Тому можна підбір перерізу на цьому закінчити.

Перевіримо стійкість стержня в плоскості XOZ для двутавра №22.

Гнучкість:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{9.13} = 65.7,$$

$$\lambda_y = 65.7 < \lambda_z^{\text{IV}} = 70.5.$$

А тому стійкість стійки, яка складається з двох двутаврів №22 в обох площинах забезпечена.

Запитання для самоперевірки

1. В чому суть поздовжнього згину?
2. Яка сила називається критичною?
3. Що називається запасом стійкості?
4. Що називається коефіцієнтом довжини і чому він дорівнює для випадків кріплення бруса?
5. Який момент інерції підставляється у формулу Ейлера? Чому?
6. Що називається гнучкістю стержня?
7. Які форми перерізу будуть раціональні при поздовжньому згині?
8. Що таке коефіцієнт φ ? Від чого він залежить?
9. В чому суть розрахунку стиснених стержнів на поздовжній згин?

15. НАБЛИЖЕНИЙ РОЗРАХУНОК НА УДАР

15.1. Основні поняття

Напруження і переміщення, викликані дією ударного навантаження, в k_d раз більше напружень і переміщень, які викликані дією такого ж по величині, але статично прикладеного навантаження, тобто

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст};$$

$$\tau_d = k_d \tau_{ст};$$

$$\Delta_d = k_d \Delta_{ст}.$$

Динамічний коефіцієнт розраховують по наступній формулі, яка отримана без врахування власної ваги системи, яка піддається удару:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}},$$

де h – висота падіння вантажу,

$\Delta_{ст}$ – величина переміщення від статичної дії сили, яка дорівнює вазі вантажу, який вдаряє.

Якщо врахувати, що $h = \frac{v^2}{2g}$ (v – швидкість вантажу, який падає, на початку

удару), то отримаємо

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{ст}}}.$$

Приклад 1

На стальний ломаний брус, зображений на рис. 15.1 а, падає вантаж Q .

Визначити максимальні розрахункові напруження в конструкції (без врахування її маси), а також вертикальне переміщення перерізу А.

Елемент АВ вважати абсолютно жорстким.

Брус ВКС зазнає згину силою Q і кручення моментом Qa – схема навантаження приведена на рис. 15.1 б.

Для визначення небезпечного перерізу бруса ВКС побудуємо епюри згинаючих моментів M_z і крутних моментів M_x . Епюра M_z , згідно схеми навантаження рис. 15.2 а, представлена на рис. 15.2 б, а епюра M_x та схема навантаження, дані на рис. 15.2 д,е. Із аналізу цих епюр робимо висновок, що небезпечним може бути або переріз С, або К. Хоча для другого M_z менше, чим для першого, але і діаметр його теж менше. Той переріз, для якого статичні еквівалентні напруження виявляться більшими, є небезпечним.

Переріз С:

$$M_z = Q(l_1 + l_2) = 250 \cdot (60 + 120) = 45000 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_x = Qa = 250 \cdot 50 = 12500 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Статичні еквівалентні напруження розрахуємо по гіпотезі найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M_z^2 + M_x^2} = \frac{1}{50.26} \sqrt{45000^2 + 12500^2} = 929.2 \text{ Н} / \text{см}^2,$$

де
$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 8^3}{32} = 50.26 \text{ см}^3.$$

Переріз К: $M_z = Ql_2 = 250 \cdot 120 = 30000 \text{ Н} \cdot \text{см}; M_x = Qa = 12500 \text{ Н} \cdot \text{см};$

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M_z^2 + M_x^2} = \frac{1}{6.28} \sqrt{30000^2 + 12500^2} = 5175.2 \text{ Н / см}^2,$$

де $W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 4^3}{32} = 6.28 \text{ см}^3.$

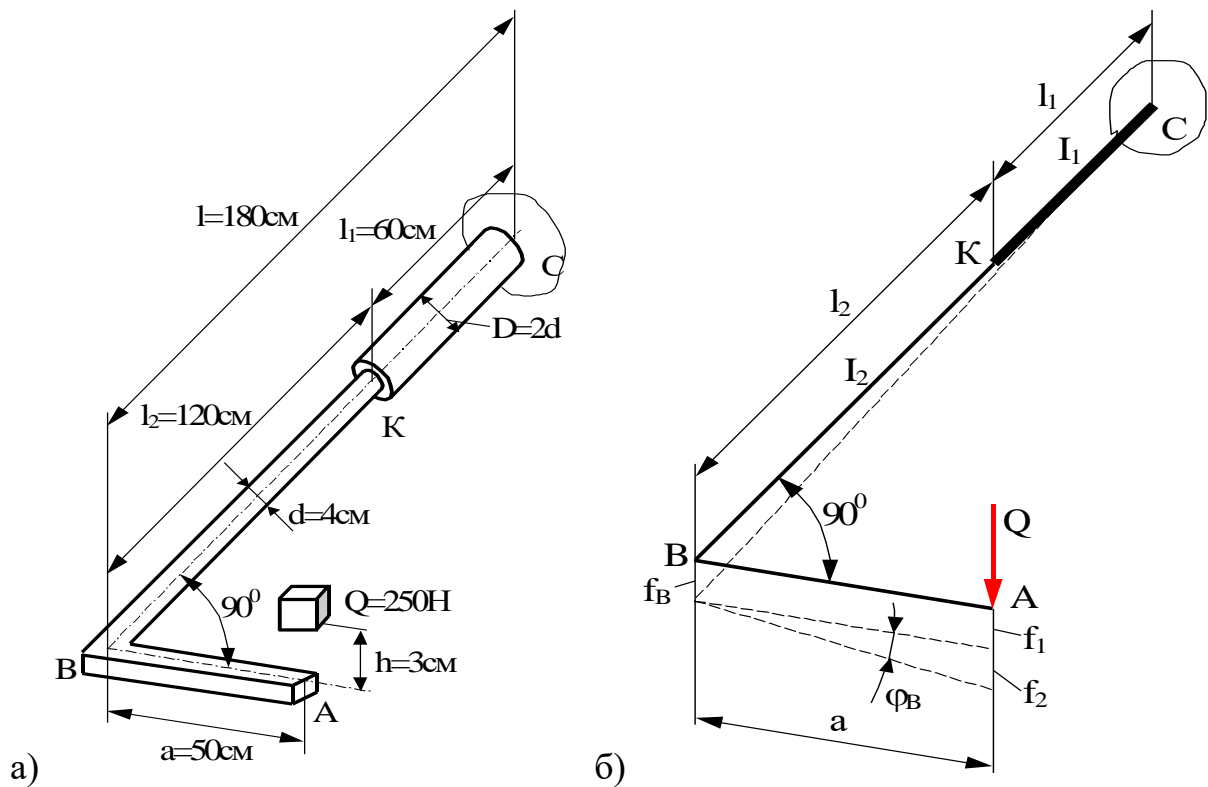


Рисунок 15.1 – Стальний ломаний брус

Отже, небезпечним є переріз К.

Визначимо статичне вертикальне переміщення перерізу А. Повне переміщення можна розглядати як суму переміщення f_1 , обумовленого згином бруса ВКС і переміщення f_2 , обумовленого закручуванням того ж бруса (рис. 15.1 б).

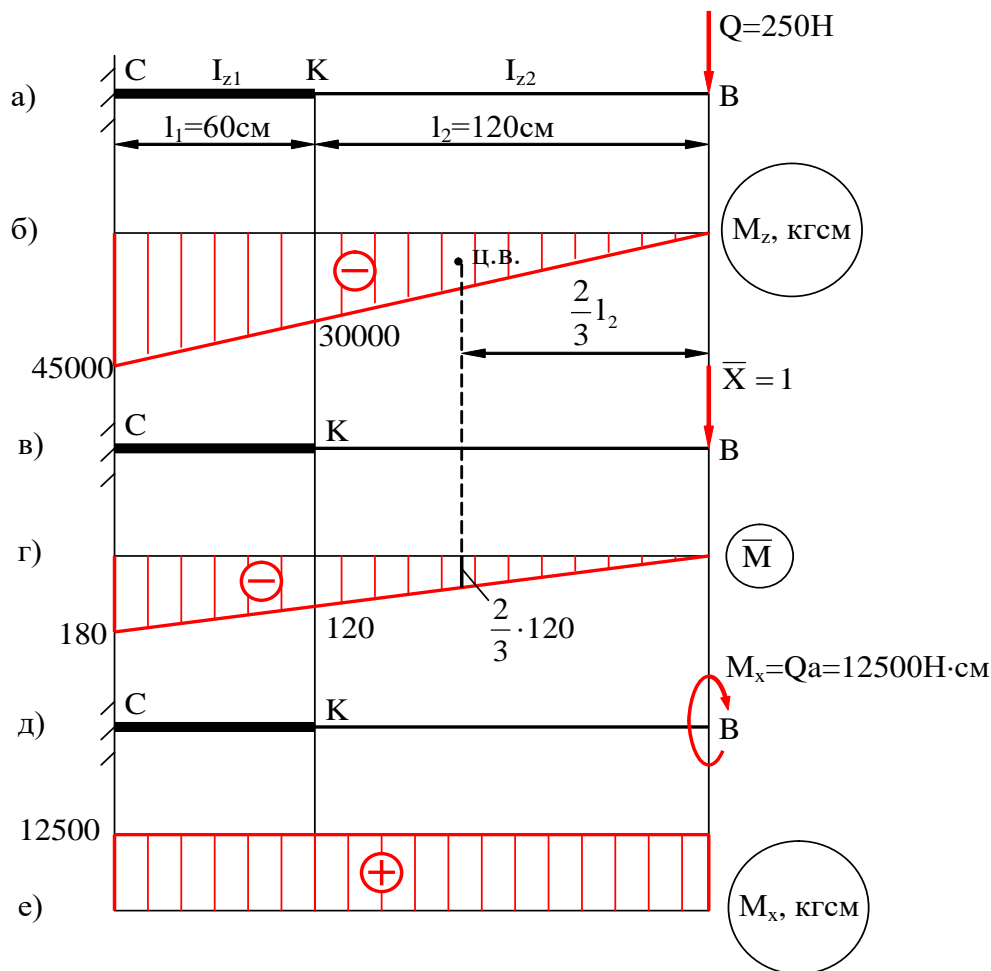


Рисунок 15.2 – До визначення переміщень

Переміщення f_1 дорівнює прогину f_B перерізу В від сили Q (нагадаємо, що по умові задачі брус АВ - абсолютно жорсткий):

$$f_2 = \varphi_B a,$$

де φ_B – кут повороту перерізу В бруса ВКС в результаті його закручування.

Величину f_1 визначимо методом Мора з застосуванням правила Верещагіна (рис.15.2, а-г):

$$f_B = f_1 = \frac{60}{6EI_{z1}} [2 \cdot 45000 \cdot 180 + 2 \cdot 30000 \cdot 120 + 30000 \cdot 180 + 120 \cdot 45000] +$$

$$+ \frac{1}{EI_{z2}} \left[\frac{1}{2} \cdot 30000 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 \right] = \frac{342 \cdot 10^6}{EI_{z1}} + \frac{144 \cdot 10^6}{EI_{z2}} =$$

$$= \frac{342 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^7 \cdot 201.06} + \frac{144 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^7 \cdot 12.57} = 0.655 \text{ см},$$

де $I_{z1} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201.06 \text{ см}^4$; $I_{z2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12.57 \text{ см}^4$.

Знаходимо кут повороту перерізу В:

$$\varphi_B = \frac{M_x l_1}{GI_{p1}} + \frac{M_x l_2}{GI_{p2}} = \frac{12500 \cdot 60}{8 \cdot 10^6 \cdot 402.12} + \frac{12500 \cdot 120}{8 \cdot 10^6 \cdot 25.13} = 7.69 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

де $I_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 8^4}{32} = 402.12 \text{ см}^4$; $I_{p2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25.13 \text{ см}^4$.

Переміщення, обумовлене закручуванням бруса

$$f_2 = a \varphi_B = 50 \cdot 7.69 \cdot 10^{-3} = 0.3845 \text{ см}.$$

Статичне вертикальне переміщення перерізу А

$$\delta_{ст} = f_A = f_1 + f_2 = 0.655 + 0.3845 = 1.04 \text{ см}.$$

Визначаємо динамічний коефіцієнт:

$$k_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 3}{1.04}} = 3.6 \cdot$$

Для небезпечного перерізу К максимальні еквівалентні динамічні напруження

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{екв}}^{\text{ст}} = 3.6 \cdot 5175.2 = 18639.9 \text{ Н / см}^2.$$

Динамічне вертикальне переміщення перерізу А

$$\delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \delta_{\text{ст}} = 3.6 \cdot 1.04 = 3.74 \text{ см.}$$

Приклад 2

На сталевий ступінчастий стержень падає вантаж Q (рис. 15.3). Вважаючи, що стійкість стержня забезпечена, визначити найбільше стискаюче напруження, яке виникає в поперечному перерізі стержня.

Максимальні статичні (стискаючі) напруження

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{N_{\text{I}}}{A_{\text{I}}} = \frac{400}{6.86} = 58.3 \text{ Н / см}^2,$$

$$\sigma_{\text{II}} = \frac{N_{\text{II}}}{A_{\text{II}}} = \frac{400}{10} = 40 \text{ Н / см}^2,$$

$$\sigma_{\text{III}} = \frac{N_{\text{III}}}{A_{\text{III}}} = \frac{400}{5} = 80 \text{ Н / см}^2,$$

де $A_{\text{I}} = A_{\text{II}} - A_{\text{отв}} = A_{\text{II}} - \frac{\pi d^2}{4} = 10 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 6.86 \text{ см}^2.$

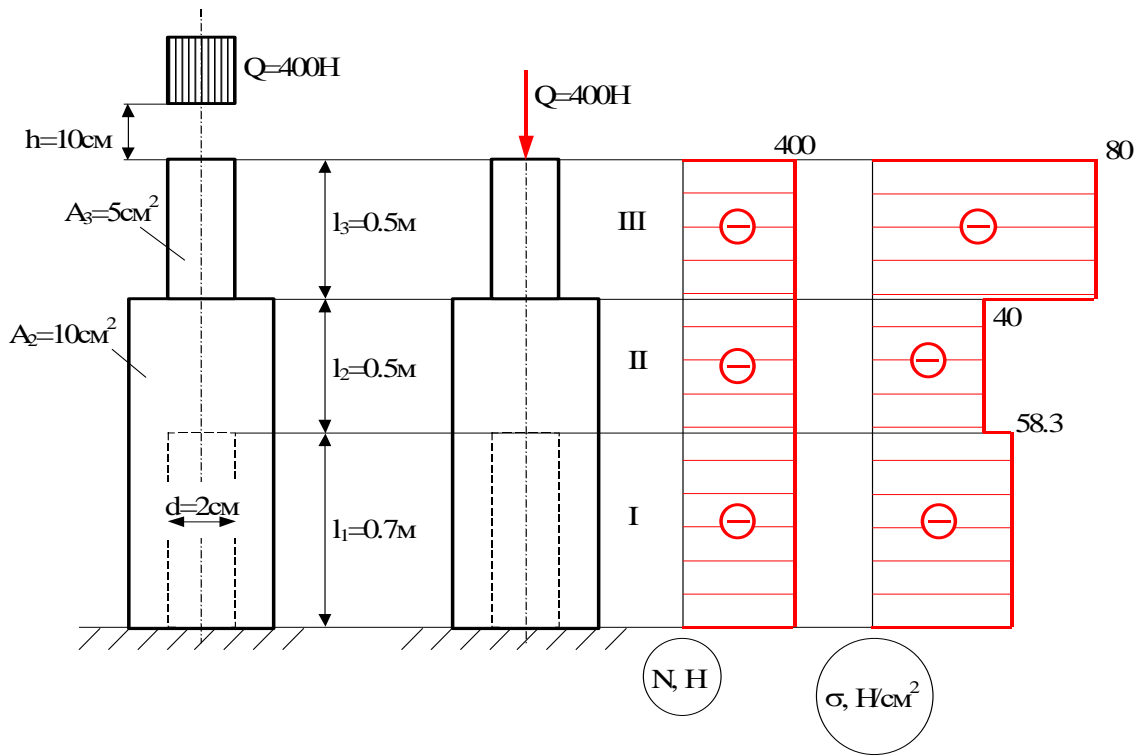


Рисунок 15.3 – Стальний ступінчастий стержень

Статичне переміщення в місці удару дорівнює, очевидно, вкороченню стержня при статичному прикладенні вантажу Q :

$$\begin{aligned} \delta_{cm} &= \sum \Delta l_{cm} = \frac{N_I l_1}{EA_1} + \frac{N_{II} l_2}{EA_2} + \frac{N_{III} l_3}{EA_3} = \\ &= \frac{400 \cdot 70}{2 \cdot 10^7 \cdot 6.86} + \frac{400 \cdot 50}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} + \frac{400 \cdot 50}{2 \cdot 10^7 \cdot 5} = 5.04 \cdot 10^{-4} \text{ см.} \end{aligned}$$

Визначасмо динамічний коефіцієнт:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{5.04 \cdot 10^{-4}}} = 200.21 \cdot$$

Динамічне напруження

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 200.21 \cdot 80 = 16016.6 \text{ Н/см}^2.$$

Динамічне переміщення

$$\delta_d = k_d \delta_{ст} = 200.21 \cdot 5.04 \cdot 10^{-4} = 0.1 \text{ см.}$$

Отриманий результат має сенс лише при умові, що межа пропорційності матеріалу стержня вище знайденого динамічного напруження.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади статичної та динамічної дії навантажень.
2. Що таке динамічний коефіцієнт?
3. Чому дорівнює динамічний коефіцієнт при раптовому прикладанні навантаження?
4. Що називається ударним навантаженням?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	σ_m	σ_T	τ_T	Відносне видовження δ , %, при 10	Ударна в'язкість КС, кДж/м ²	σ_{-1}	σ_{-1}°	τ_{-1}^x
	Не менше					МПа		
	МПа					МПа		
10	340	210	140	31	2400	160-220	120-150	80-120
20	420	250	160	25	-	170-220	120-160	100-130
25	460	280	-	23	900	190-250	-	-
30	500	300	170	21	800	200-270	170-210	110-140
35	540	320	190	20	700	220-300	170-220	130-180
40	580	340	-	10	600	230-320	180-240	140-190
45	610	360	220	16	500	250-340	190-250	150-200
50	640	380	-	14	400	270-350	200-260	160-210
55	660	390	-	13	-	-	-	-
60	690	410	-	12	-	310-380	220-280	180-220
20Г	460	280	-	24	-	-	-	-
30Г	550	320	-	20	800	220-320	-	-
50Г	660	400	-	13	400	290-360	-	-
20Х	800	650	-	11	600	380	-	170-320
40Х	1000	800	-	10	600	350-380	250	225
45Х	1050	850	-	9	500	400-500	-	-
30ХМ	950	750	-	11	800	310-410	370	230
35ХМ	1000	850	-	12	800	470-510	-	-
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	-	9	500	550	-	-
40ХФА	900	750	-	10	900	380-490	-	-
38ХМЮА	1000	850	-	14	900	420-550	-	-
12ХНЗА	950	700	400	11	900	390-470	270-320	220-260
20ХНЗА	950	750	-	12	1000	430-450	300-320	245-255
30ХНЗА	1000	800	-	10	800	520-700	-	320-400
40ХНМА	1000	950	-	12	1000	500-700	-	270-380
30ХГСА	1100	850	-	10	500	510-540	500-535	220-245

Примітка. При використанні сталей за ГОСТ 380-71 необхідно врахувати приблизну відповідність марок: Ст.3 і відповідає сталі 20; Ст.4 – сталі 25; Ст.5 – сталі 35; Ст.6 – сталі 45.

Додаток 2

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа				Твердість по Бригнеллю НВ	Границя витривалості, МПа	
	При розтягу σ_M	При стиску σ_M	При згині σ_M	При крученні τ_M		При згині σ_{-1}	При крученні τ_{-1}
СЧ 12	120	500	280	-	143-229	-	-
СЧ15	150	650	320	240	163-229	70	50
СЧ 18	180	700	360	-	170-229	-	-
СЧ 21	210	750	400	280	172-241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187-217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170-241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187-255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	198-269	160	115
СЧ38	380	1400	600	460	207-269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600-1700	-	480-510	156-197	150-170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860-2000	-	740-790	187-255	230-270	170-210
ВЧ 60-2	600	2040-2290	-	660-810	197-269	170-230	150-160

Додаток 3

Орієнтовні значення основних допустимих напруг на розтяг і стиск

Матеріал	Допустимі напруги, МПа	
	На розтяг	На стиск
Чавун сірий	28-30	120-150
Сталь: Ст 2	140	
Ст 3	160	
Машинобудівельна (конструкційна) вуглецева	60-250	
Машинобудівельна (конструкційна) легована	100-400 і більше	
Мідь	30-12	
Латунь	70-140	
Бронза	60-120	
Алюміній	30-80	
Алюмінієва бронза	80-120	
Дюралюміній	80-150	
Текстоліт	30-40	

Модуль пружності і коефіцієнт Пуассона

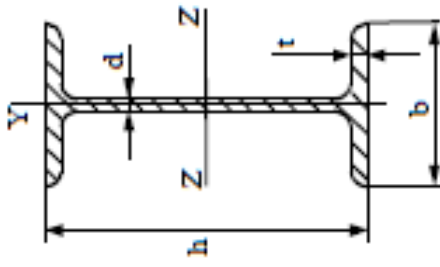
Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона μ
	E	G	
1	2	3	4
Чавун сірий, білий	(1,15-1,60)*10 ⁵	4,5*10 ⁴	0,23-0,27
Чавун ковкий	1,55*10 ⁵	-	-
Сталі вуглецеві	(2,0-2,1)*10 ⁵	(8,0-8,1)*10 ⁴	0,24-0,28
Сталі леговані	(2,1-2,2)*10 ⁵	8,0-8,1)*10 ⁴	0,25-0,30
Мідь прокатана	1,1*10 ⁵	4,0*10 ⁴	0,31-0,34
Мідь холоднотянута	1,3*10 ⁵	4,9*10 ⁴	-
Мідь лита	0,84*10 ⁵	-	-
Бронза фосфориста катана	1,15*10 ⁵	4,2*10 ⁴	0,32-0,35
Бронза марганцовиста катана	1,1*10 ⁵	4,0*10 ⁴	0,35
Бронза алюмінієва лита	10,6*10 ⁵	4,2*10 ⁴	-
Латунь холоднотянута	(0,91-0,99)*10 ³	(3,5-3,7)*10 ⁴	0,32-0,42
Латунь катана	1,0*10 ⁵	-	0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	0,7*10 ⁵	-	-
Дюралюміній катаний	0,71*10 ⁵	2,7*10 ⁴	-
Цинк катаний	0,84*10 ⁵	3,2*10 ⁴	0,27
Сивець	0,17*10 ⁵	0,70*10 ⁴	0,42
Скло	0,56*10 ⁵	22*10 ⁴	0,25
Граніт	0,49*10 ⁵	-	-
Каучук	0,00008*10 ⁵	-	0,47
Текстоліт	(0,06-0,1)*10 ⁵	-	-
Гетінакс	(0,1-0,17)*10 ⁵	-	-

Значення коефіцієнта φ

Гнучкість λ	Коефіцієнт φ для матеріалу			
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст. 5	Чавуну	Дерева
1	2	3	4	5
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,07
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,91	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,36	-	0,22
130	0,40	0,33	-	0,18
140	0,36	0,29	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,24	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,16	-	0,09

Додаток 6

Балки двотаврові (за ГОСТ 8239-72)

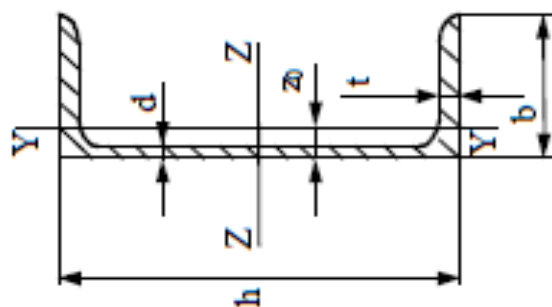


- h – висота балки,
 b – ширина полиці;
 d – товщина стінки,
 t – середня товщина полиці;
 I – момент інерції;
 W – момент опору;
 i – радіус інерції;
 S – статичний момент половини перерізу;

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу S_{z_2} cm^2	I_{z_2} cm^4	W_{z_2} cm^3	i_{z_2} cm	S_{z_3} cm^3	I_{y_2} cm^4	W_{y_2} cm^3	i_{y_2} cm	Маса $1M$, кг
	h	b	d									
1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,4
12	120	64	4,8	7,3	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	873	109	6,57	62,3	58,9	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,2	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	1430	159	7,52	89,8	114	22,8	2,12	19,0
20	200	100	5,2	8,4	1840	184	8,22	104	115	23,1	2,07	21,0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	3,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	6010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	59,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	69,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	35962	2035	21,8	1181	1366	151	3,39	92,7
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1481	1725	182	3,54	108

Балки швелерні (за ГОСТ 8240 – 72)



Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	I _z , ⁴ см ⁴	W _z , ³ см ³	i _z , см	S _z , ³ см ³	I _y , ⁴ см ⁴	W _y , ³ см ³	i _y , см	Z ₀ , см	Маса ІМ, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,116	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,2	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	20,4	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	106	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,38	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,43	24,0
24a	240	95	6,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

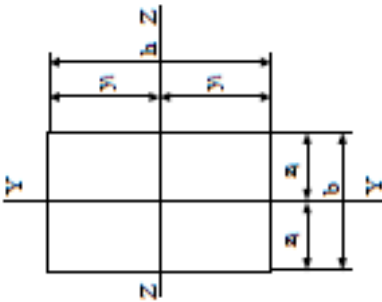
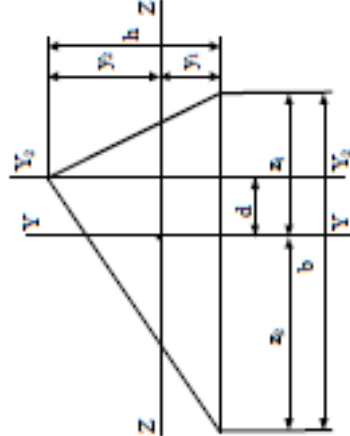
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3.2	32	3	4.5	1.5	1.86	1.77	0.77	0.97	1.03	0.89
3.5	35	4			2.43	2.26	1	0.96	1.32	0.94
		3			2.04	2.35	0.93	1.07	1.37	0.97
		4			2.67	3.01	1.21	1.06	1.75	1.01
		5			3.28	3.61	1.47	1.05	2.1	1.05
4	40	3	5	1.7	2.35	3.55	1.22	1.23	2.08	1.09
		4			3.08	4.58	1.6	1.22	2.68	1.13
		5			3.79	5.53	1.95	1.21	3.22	1.17
		6			4.48	6.41	2.3	1.2	3.72	1.21
4.5	45	3	5	1.7	2.65	5.13	1.56	1.39	3	1.21
		4			3.48	6.63	2.04	1.38	3.89	1.26
		5			4.29	8.03	2.51	1.37	4.71	1.3
		6			5.08	9.35	2.95	1.36	5.45	1.34
5	50	3	5.5	1.8	2.96	7.11	1.94	1.55	4.16	1.33
		4			3.89	9.21	2.54	1.54	5.42	1.38
		5			4.8	11.2	3.13	1.53	6.57	1.42
		6			5.69	13.07	3.69	1.52	7.65	1.46
		7			6.56	14.84	4.23	1.5	8.63	1.5
		8			7.41	16.51	4.76	1.49	9.52	1.53
5.6	56	4	6	2	4.38	13.1	3.21	1.73	7.69	1.52
		5			5.41	15.97	3.96	1.72	9.41	1.57

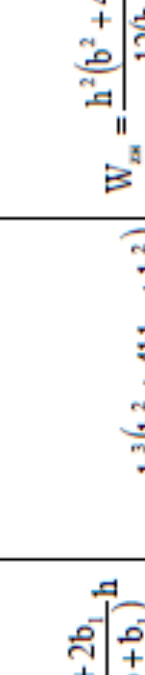
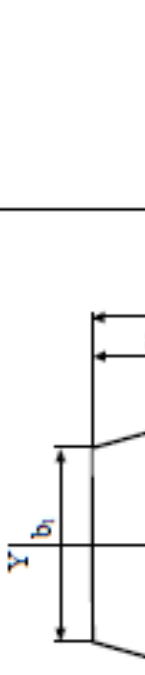
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	60	4	7	2.3	4.72	16.21	3.7	1.85	9.48	1.62
		5			5.83	19.79	4.56	1.84	11.61	1.66
		6			6.92	23.21	5.4	1.83	13.6	1.7
		8			9.04	29.55	7	1.81	17.22	1.78
		10			11.08	35.32	8.52	1.79	20.32	1.85
6.3	63	4			4.96	18.86	4.09	1.95	11	1.69
		5			6.13	23.1	5.05	1.94	13.7	1.74
		6			7.28	27.06	5.98	1.93	15.9	1.78
7	70	4.5	8	2.7	6.2	29.04	5.67	2.16	17	1.88
		5			6.86	31.94	6.27	2.16	18.7	1.9
		6			8.15	37.58	7.43	2.15	22.1	1.94
		7			9.42	42.98	8.57	2.14	25.2	1.99
		8			10.67	48.16	9.68	2.12	28.2	2.02
		10			13.11	57.9	11.82	2.1	33.6	2.1
7.5	75	5	9	3	7.39	39.53	7.21	2.31	23.1	2.02
		6			8.78	46.57	8.57	2.3	27.3	2.06
		7			10.15	53.34	9.89	2.29	31.2	2.1
		8			11.5	59.84	11.18	2.28	35	2.15
		9			12.83	66.1	12.43	2.27	38.6	2.18
8	80	5.5	9	3	8.63	52.68	9.03	2.47	30.9	2.17
		6			9.38	56.97	9.8	2.47	33.4	2.19
		7			10.85	65.31	11.32	2.45	38.3	2.23
		8			12.3	73.36	12.8	2.44	43	2.27
		10			15.14	88.58	15.67	2.42	56.7	2.35
		12			17.9	102.74	18.42	2.4	59.5	2.42

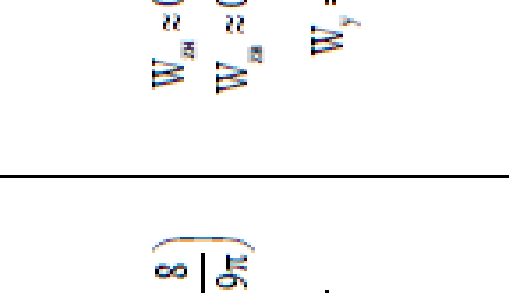
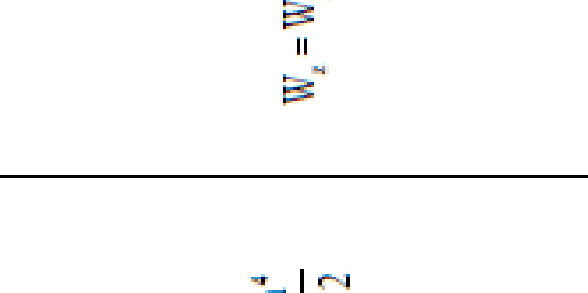
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12.5	125	8	14	4.6	19.69	294.36	32.2	3.87	172	3.36
		9			22	327.48	36	3.86	192	3.4
		10			24.33	359.82	39.74	3.85	211	3.45
		12			28.89	422.23	47.06	3.82	248	3.53
		14			33.37	481.76	54.17	3.8	282	3.61
		16			37.77	538.56	61.09	3.78	315	3.68
14	140	9	14	4.6	24.72	465.72	45.55	4.34	274	3.78
		10			27.33	512.29	50.32	4.33	301	3.82
		12			32.49	602.49	59.66	4.31	354	3.9
15	150	10			29.33	634.76	58.07	4.65	374	4.07
		12			34.89	747.48	68.9	4.63	440	4.15
		15			43.08	908.38	84.66	4.59	534	4.27
		18			51.09	1060.08	99.86	4.56	621	4.38
16	160	10	16	5.3	31.43	774.24	66.19	4.96	455	4.3
		11			34.42	844.21	72.44	4.95	496	4.35
		12			37.39	912.89	78.62	4.94	537	4.39
		14			43.57	1046.47	90.77	4.92	615	4.47
		16			49.07	1175.19	102.64	4.89	690	4.55
		18			54.79	1290.24	114.24	4.87	771	4.63
		20			60.40	1418.85	125.6	4.85	830	4.7
18	180	11	16	5.3	38.8	1216.44	92.47	5.6	716	4.85
		12			42.19	1316.62	100.41	5.59	776	4.89
		15			52.18	1607.36	123.74	5.55	948	5.01
		18			61.99	1884.07	146.36	5.51	1108	5.13
		20			68.43	2061.11	161.07	5.49	1210	5.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	200	12	18	6	47.1	1822.78	124.61	6.22	1073	5.37
		13			50.85	1960.77	134.44	6.21	1156	5.42
		14			54.6	2097	144.17	6.2	1236	5.46
		16			61.98	23.62.57	163.37	6.17	1393	5.54
		18			69.3	2620.64	182.22	6.15	1544	5.62
		20			76.54	2871.47	200.73	6.12	1689	5.7
		24			90.78	3350.66	236.77	6.08	1963	5.85
		25			94.29	3466.21	245.59	6.06	2028	5.89
22	220	30			111.54	4019.6	288.57	6	2332	6.07
		14	21	7	60.38	2814.36	175.18	6.83	1655	5.91
		16			68.58	3175.44	198.71	6.8	1862	6.02
25	250	16	24	8	78.4	4717.1	258.43	7.76	2775	6.75
		18			87.72	5247.24	288.82	7.73	3089	6.83
		20			96.96	5764.87	318.76	7.71	3395	6.91
		22			106.12	6270.32	348.26	7.69	3691	7
		25			119.71	7006.39	391.72	7.65	4119	7.11
		28			133.12	7716.86	434.86	7.61	4527	7.23
		30			141.96	8176.51	462.11	7.59	4788	7.31

Додаток 7

Форма перерізу	Площа перерізу A	Координати крайніх точок перерізу	Осьові моменти інерції I_x, I_y	Осьові моменти опору W_x, W_y
	$A = bh$	$z_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$y_1 = \frac{1}{3}h$ $y_2 = \frac{2}{3}h$ $d = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh(b^2 - z_2 z_1)}{36}$	$W_x = \frac{bh^2}{12}$ $W_{x0} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{y0} = \frac{bh(b^2 - z_2 z_1)}{36z_1}$ $W_{y0} = \frac{bh(b^2 - z_2 z_1)}{36z_2}$
1	2	3	4	5

1		2	3	4	5
	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b)h$	$y_1 = \frac{b + 2b_1}{3(b + b_1)}h$ $y_2 = \frac{2b + b_1}{3(b + b_1)}h$ $z_1 = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{h^3(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{36(b + b_1)}$ $I_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b - b_1}$	$W_{x0} = \frac{h^2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12(b + 2b_1)}$ $W_{y0} = \frac{h^2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12(2b + b_1)}$ $W_{ym} = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b^2 - bb_1}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$z_1 = y_1 = \frac{d}{2}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$		
1		2	3	4	5

1		2	3	4	5
	2	3	4	5	
	$A = \frac{\pi d^2}{8}$	$z_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = \frac{2d}{3\pi}$	$I_x = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128}$	$W_{cm} \approx 0.0324d^3$ $W_{cm} \approx 0.0239d^3$ $W_y = \frac{\pi d^3}{64}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
$F = a^2$	$z_1 = y_1 = \frac{h}{2}$	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$			

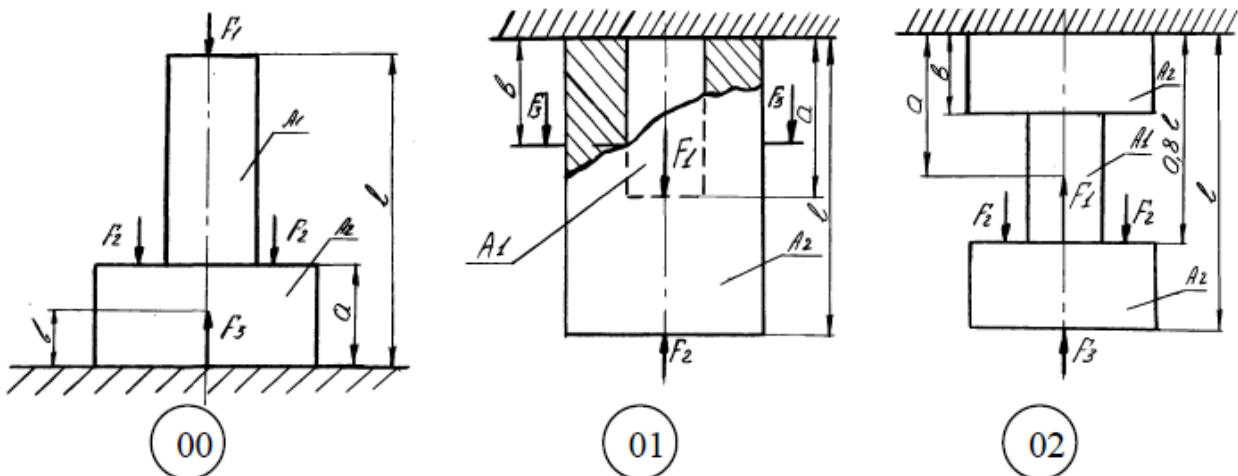
“Побудова епюр нормальних сил”

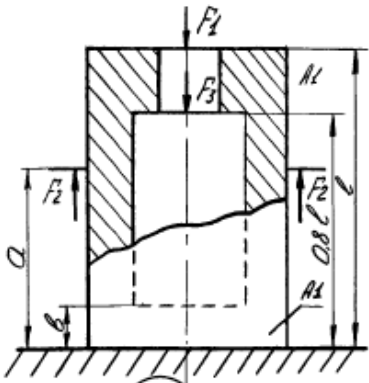
Для заданого ступінчастого стержня побудувати епюри нормальних сил з урахуванням власної ваги стержня, якщо: $l = 5\text{м}$; $A_2=2A_1=50\text{см}^2$; матеріал стержня – сталь, питома вага якої $\gamma=8 \cdot 10^{-3}\text{кг/см}^3$

№	$F_1, \text{кг}$	$F_2, \text{кг}$	$F_3, \text{кг}$	a, см	b, см
1	100	150	80	0,5 l	0,4 l
2	120	140	200	0,4 l	0,7 l
3	180	80	100	0,3 l	0,6 l
4	100	160	130	0,6 l	0,3 l
5	140	200	150	0,4 l	0,5 l
6	80	130	100	0,6 l	0,1 l
7	140	200	50	0,9 l	0,7 l
8	150	100	40	0,4 l	0,2 l
9	180	180	200	0,7 l	0,2 l
0	150	100	140	0,5 l	0,4 l

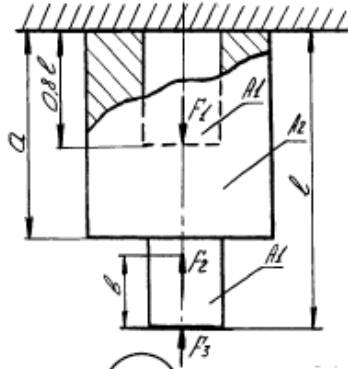
План розв’язку задачі № 11

1. Зобразити розрахункову схему.
 2. Записати рівняння $N=N(x)$ для кожної силової ділянки.
- Побудувати епюру нормальних сил.

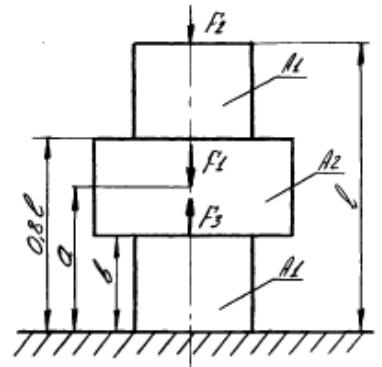




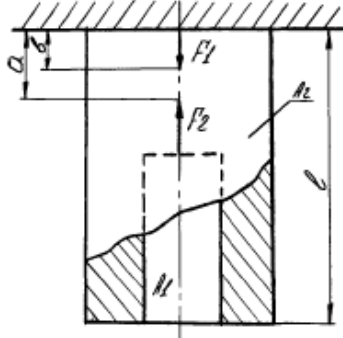
03



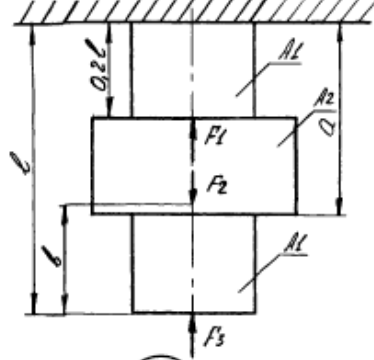
04



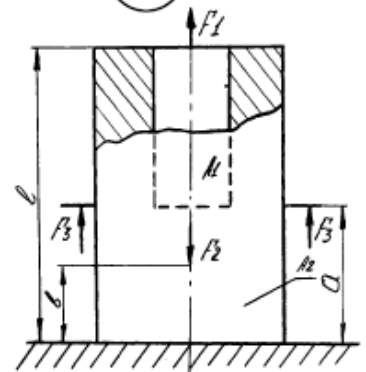
05



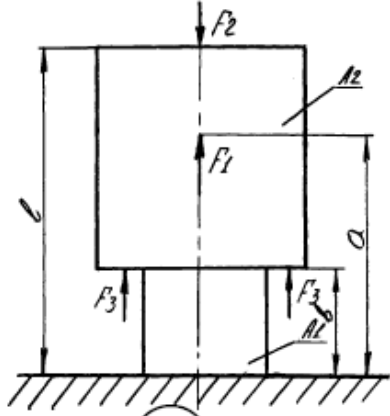
06



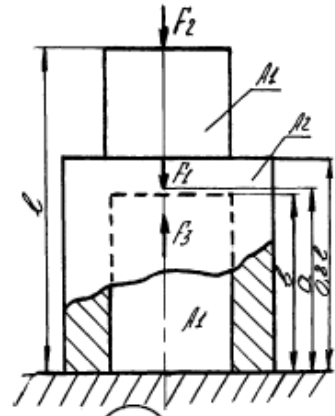
07



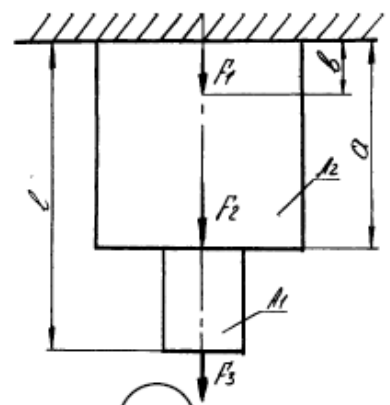
08



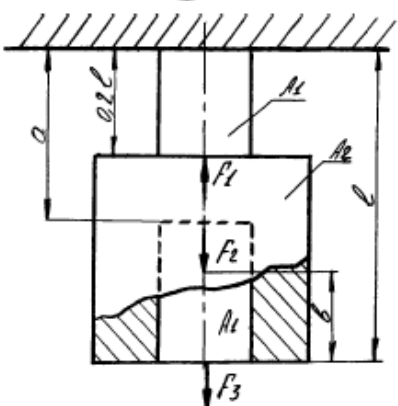
09



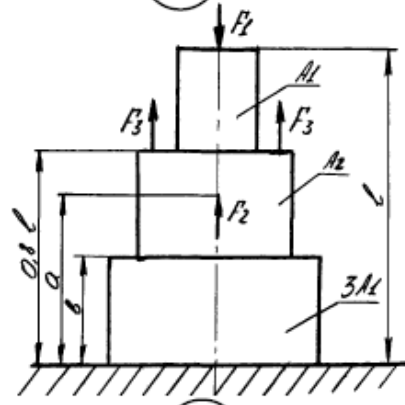
10



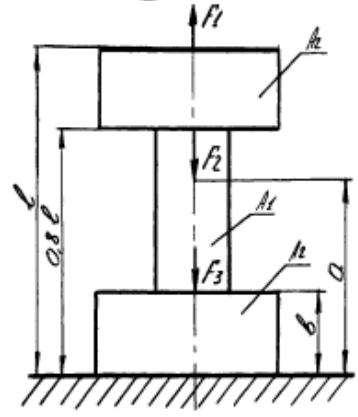
11



12



13



14

“Побудова епюр крутних моментів $M_{кр}$ ”

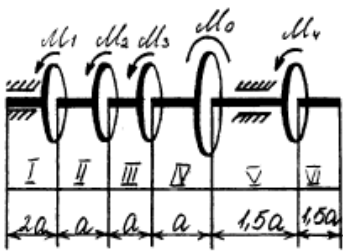
Побудувати епюри крутних моментів вала з насадженими на нього шківками, якщо $M=30\text{кНм}$, $a=1,0\text{м}$. На одній із силових ділянок діє розподілений момент інтенсивність якого $m = \frac{M}{a} \cdot k$.

Якщо в таблиці значення k додатне, то розподілений момент діє за годинниковою стрілкою, якщо дивитись на вал зліва. Якщо від’ємний - то проти годинникової стрілки. Тертям в підшипниках знехтувати.

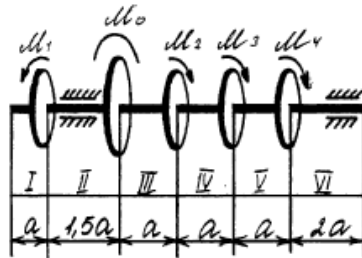
№ п/п	M_1	M_2	M_3	M_4	K	Ділянка дії
0	2,4M	1,8M	2M	M	3,0	III
1	2M	3M	2,2M	3M	-2,0	I
2	M	1,6M	2M	2,6M	1,0	VI
3	M	0,8M	2M	2,6M	0,5	II
4	0,6M	2M	0,4M	3M	1,5	III
5	3M	0,6M	3M	0,6M	-2,5	II
6	2M	M	0,8M	2,4M	2,0	IV
7	0,8M	1,4M	1,6M	2M	-0,5	V
8	1,6M	0,6M	0,8M	1,6M	0,5	IV
9	1,2M	M	2M	24M	1,0	I

План розв’язку.

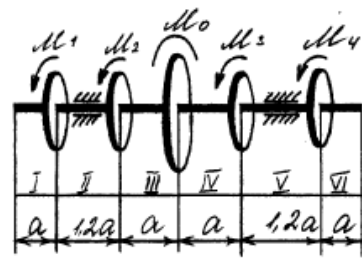
1. Визначити момент M_0 за величиною і напрямком.
2. Побудувати епюри крутних моментів.



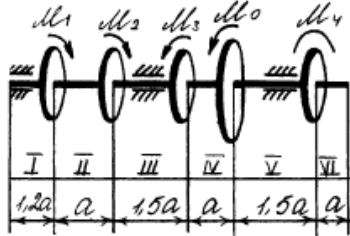
00



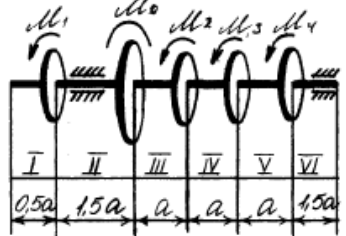
01



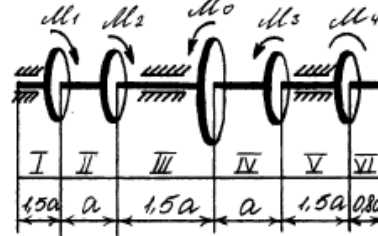
02



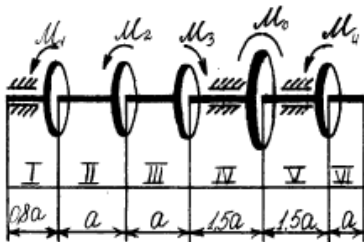
03



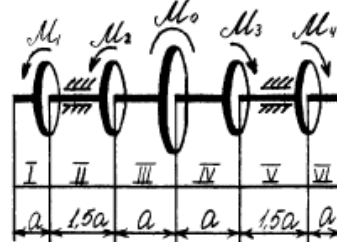
04



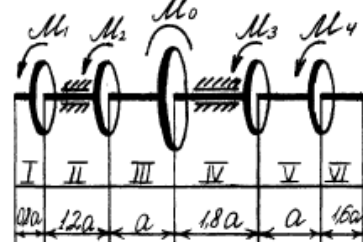
05



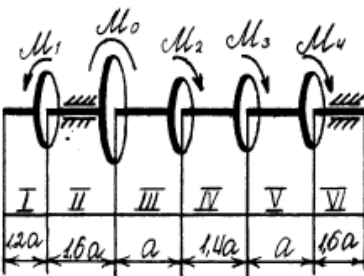
06



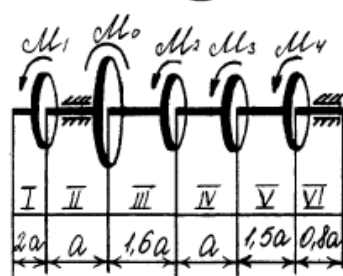
07



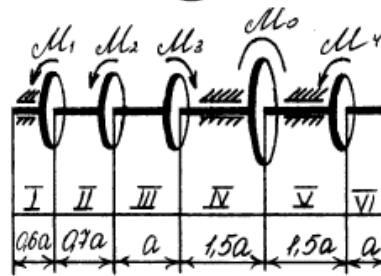
08



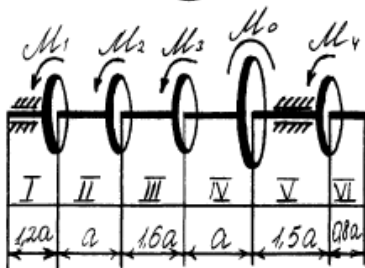
09



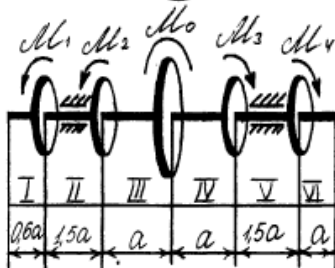
10



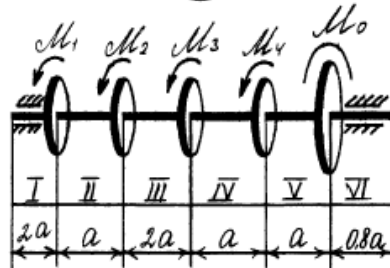
11



12



13

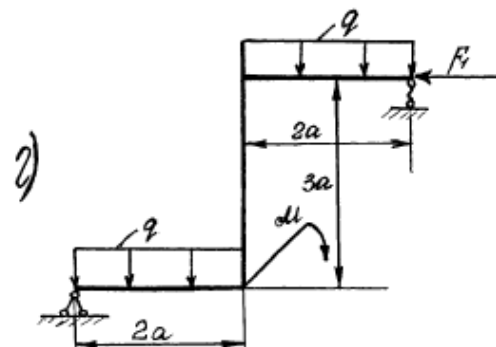
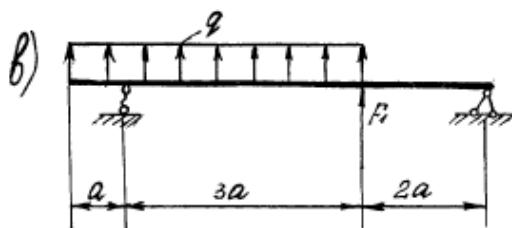
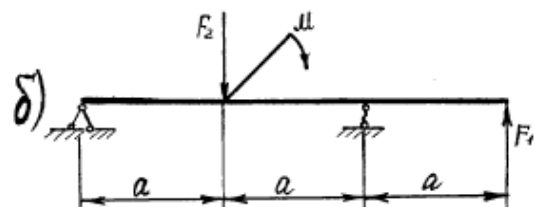
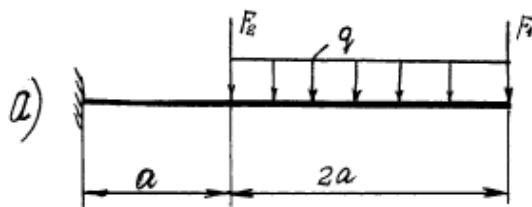


14

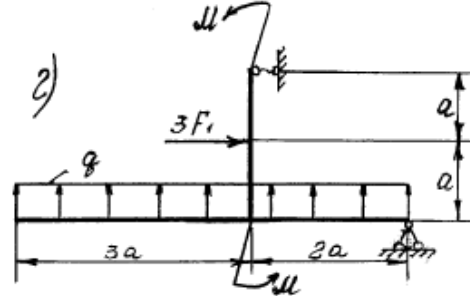
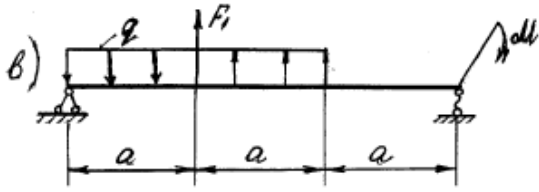
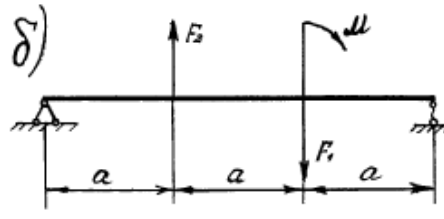
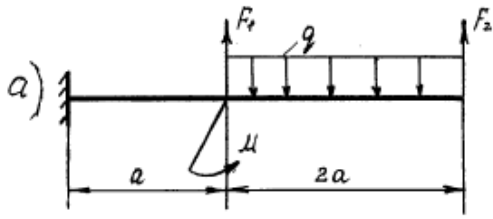
“Побудова епюр в балках і рамках”

1. Для схем балок (а), (б) і (в) побудувати епюри поперечних сил Q і згинаючих моментів $M_{зг}$.
2. Для схеми рами (г) побудувати епюри, нормальних сил N , поперечних сил Q і згинаючих моментів $M_{зг}$.

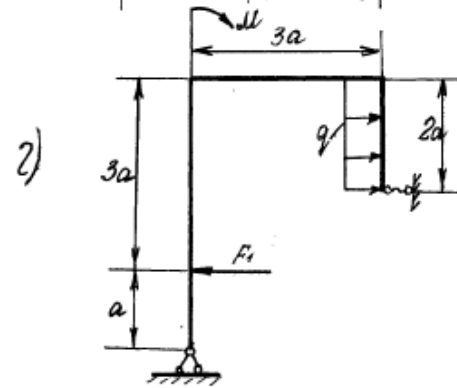
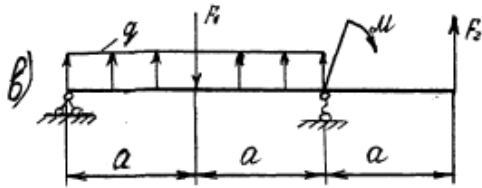
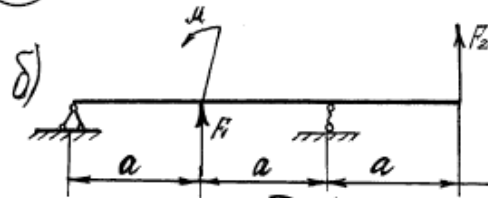
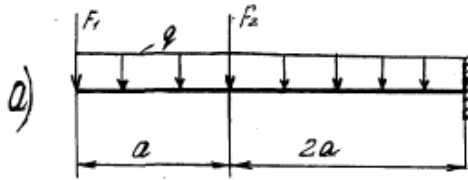
№ п/п	q , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M , кНм	a , м	Марка чавуну
0	10	50	10	20	1,6	Сч –12
1	15	40	20	10	1,5	Сч –15
2	20	30	30	30	2,0	Сч –18
3	25	20	40	20	2,5	Сч –21
4	30	10	50	30	3,0	Сч –24
5	15	50	10	10	1,0	Сч –28
6	15	40	20	10	1,5	Сч –32
7	20	30	30	20	2,0	Сч –35
8	25	20	40	30	2,5	Сч –38
9	30	10	50	20	3,0	Сч –21



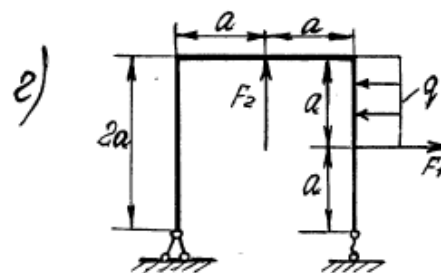
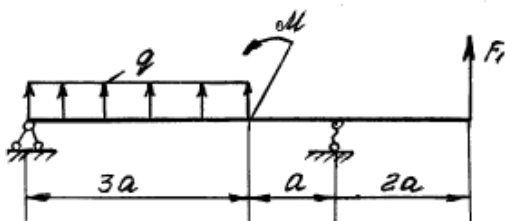
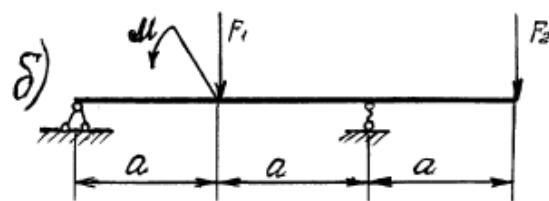
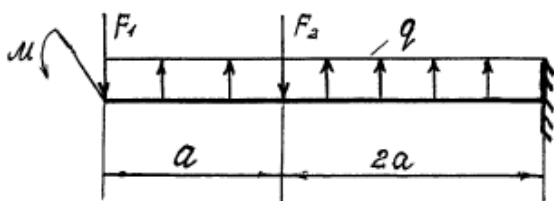
00



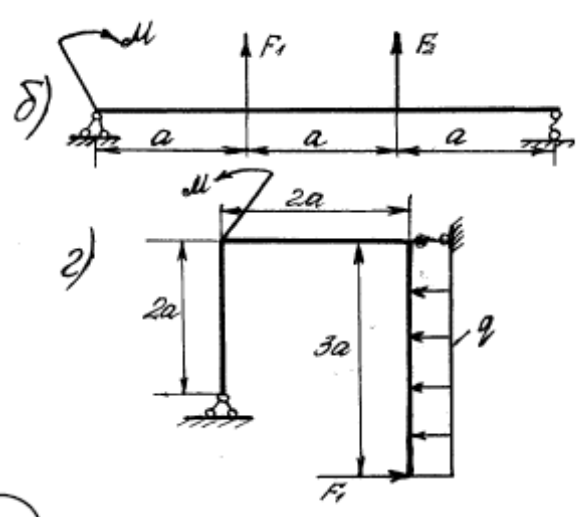
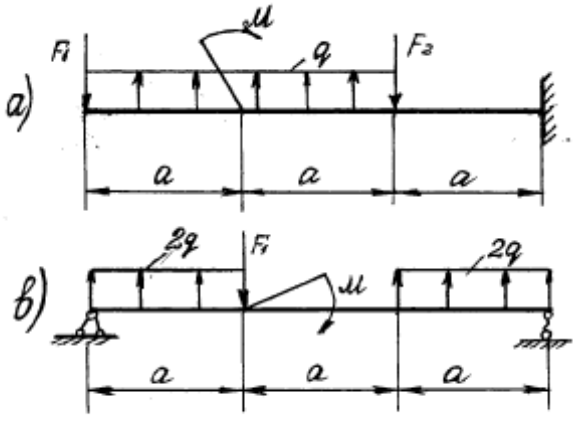
01



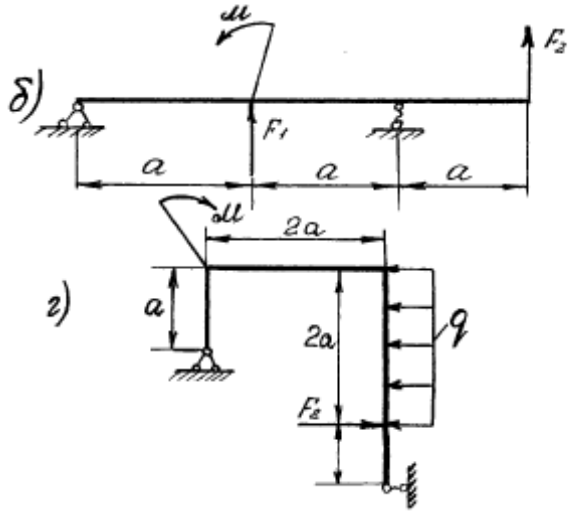
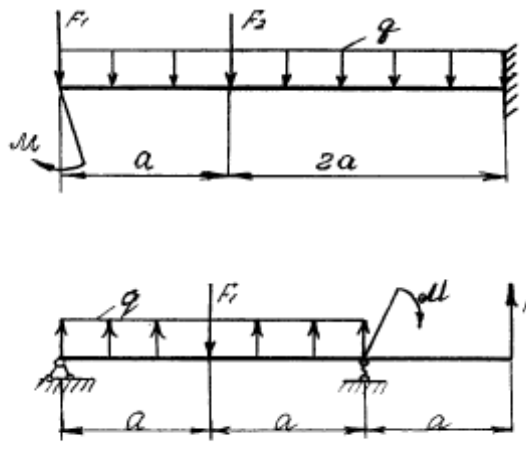
02



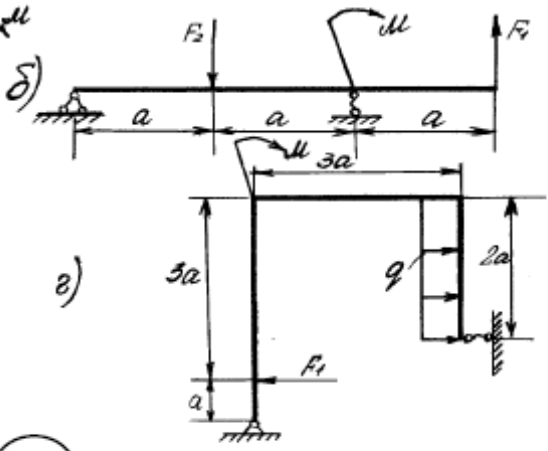
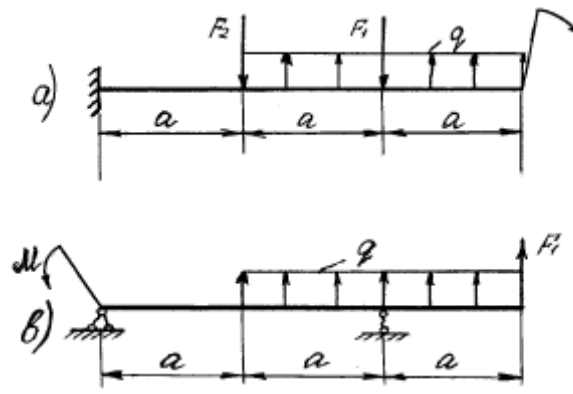
03



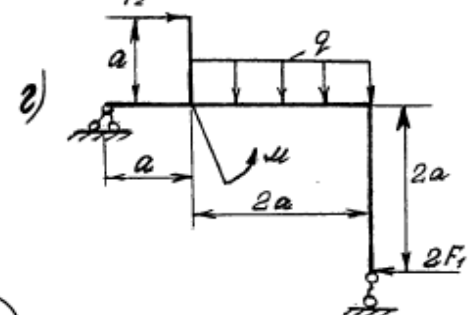
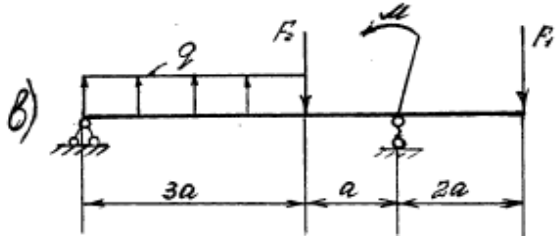
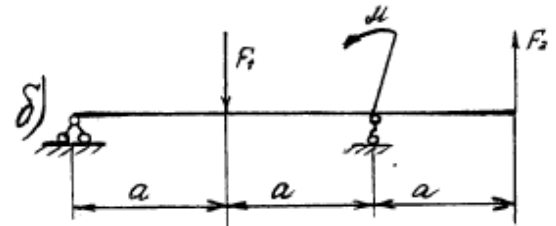
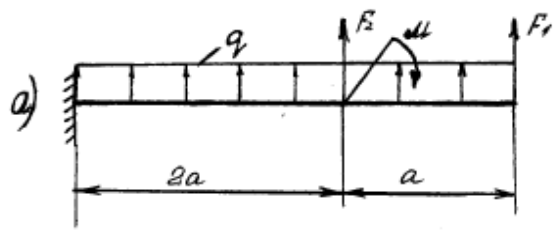
04



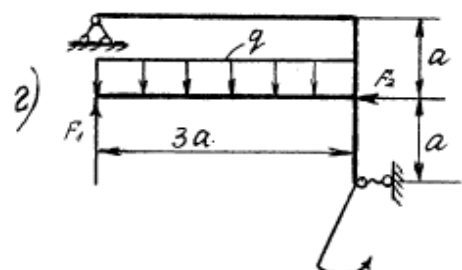
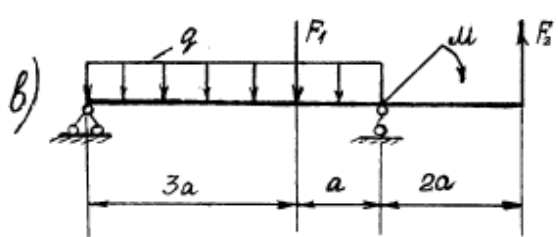
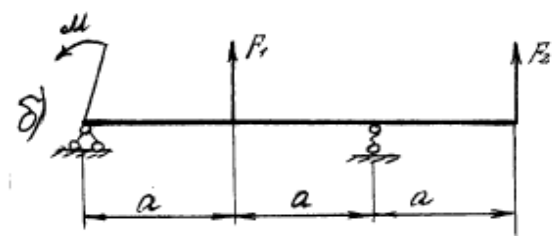
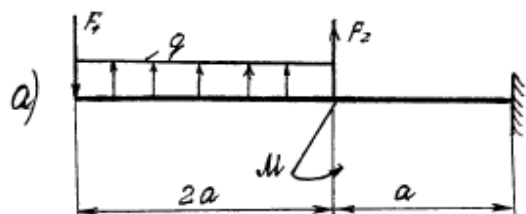
05



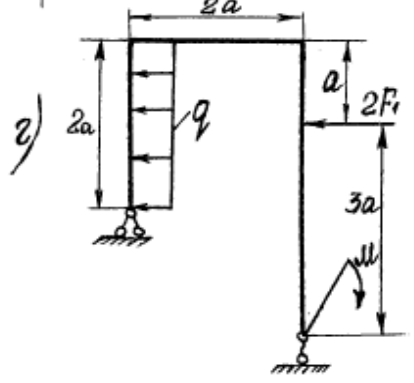
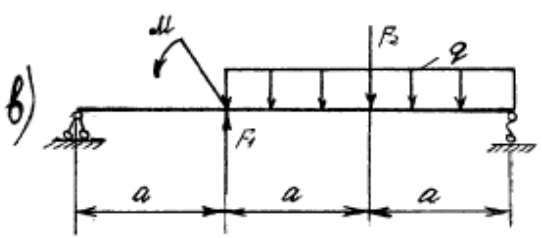
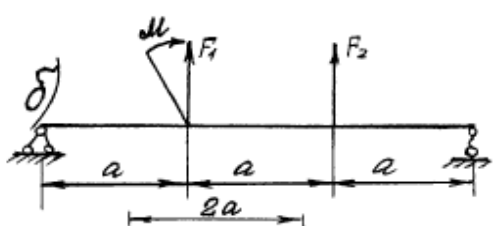
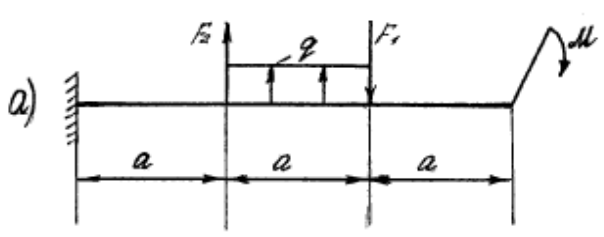
06



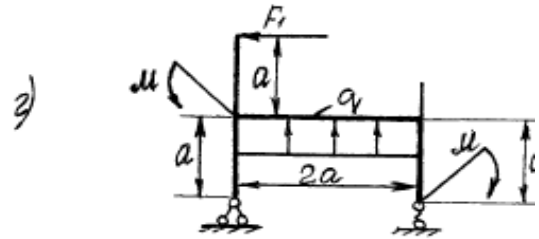
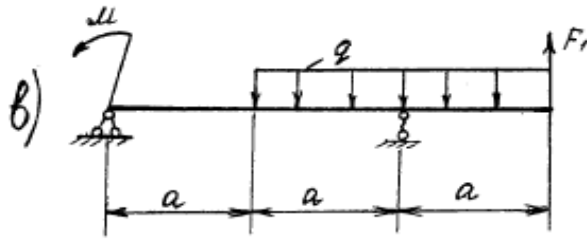
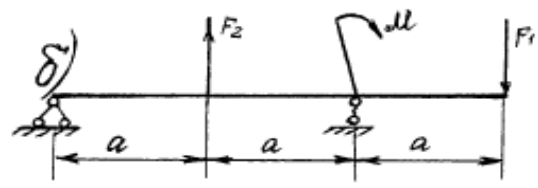
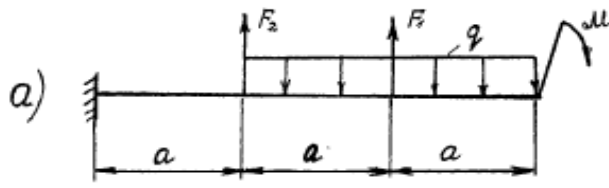
07



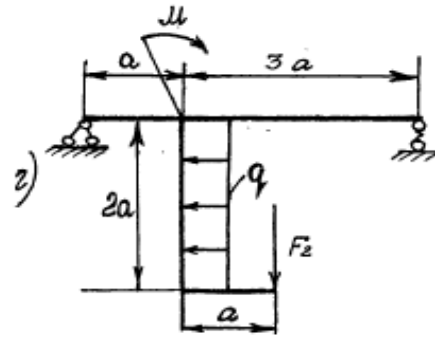
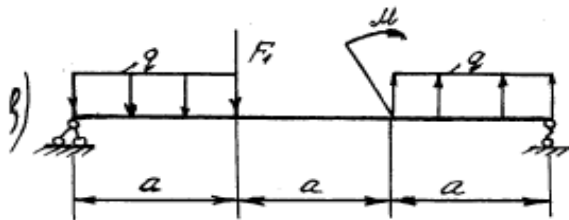
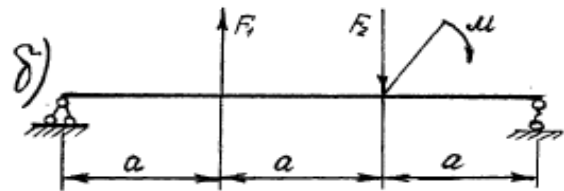
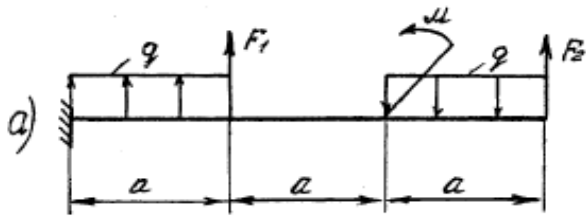
08



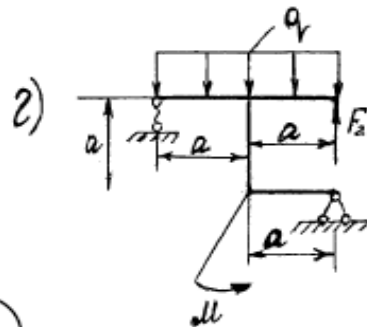
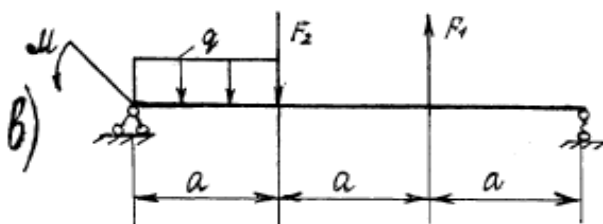
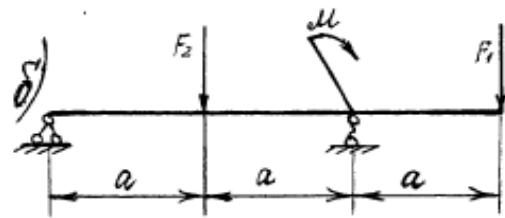
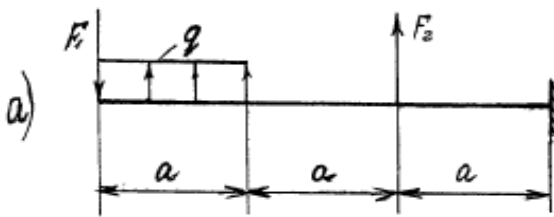
09



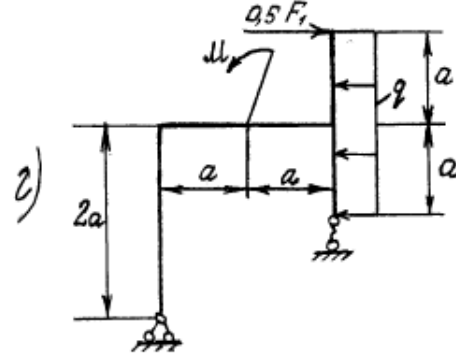
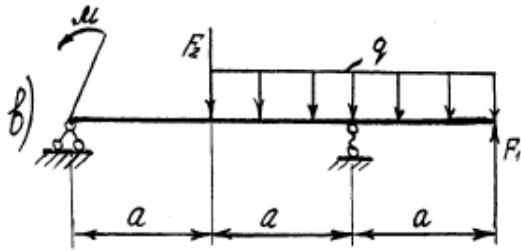
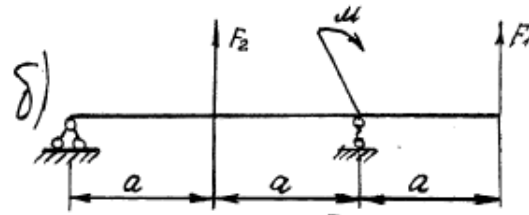
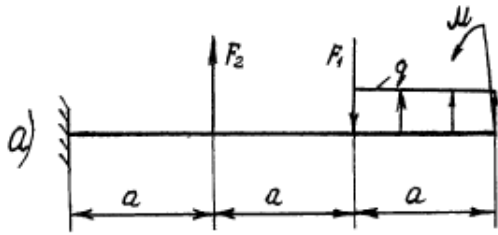
10



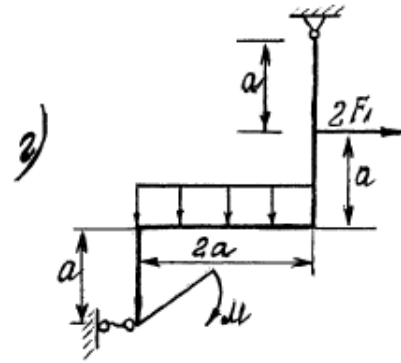
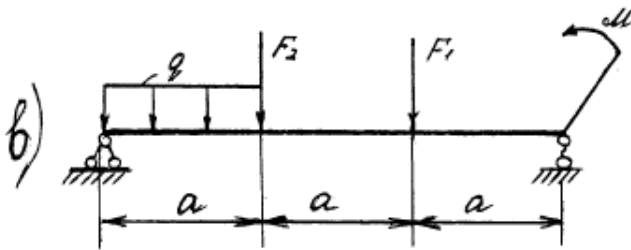
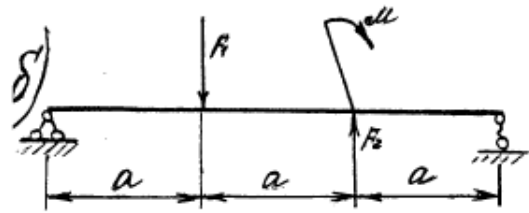
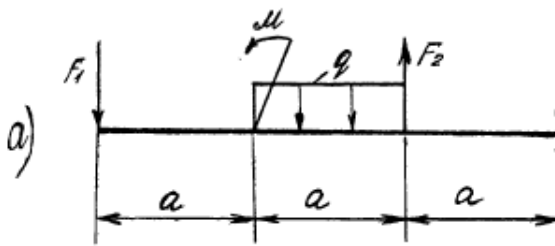
11



12



13



14

“Розрахунок на міцність статично невизначених систем при розтягу”

Для заданої системи визначити діаметр стержнів, якщо відоме відношення їх площ і величина діючого навантаження.

План розв'язку

1. Накреслити задану схему в масштабі.
2. Встановивши ступінь статичної невизначеності i , показавши схему в передбаченому деформуючому стані, скласти необхідне рівняння спільності деформації.
3. Визначити діаметри стержнів, використавши умови міцності при розтягу.

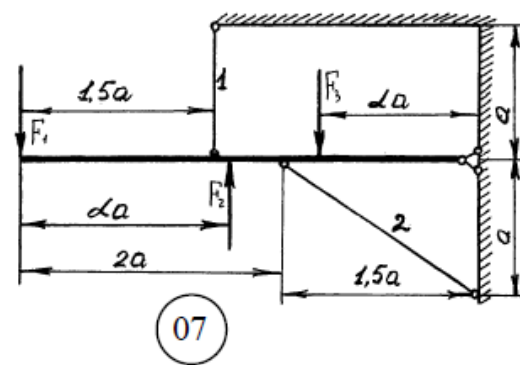
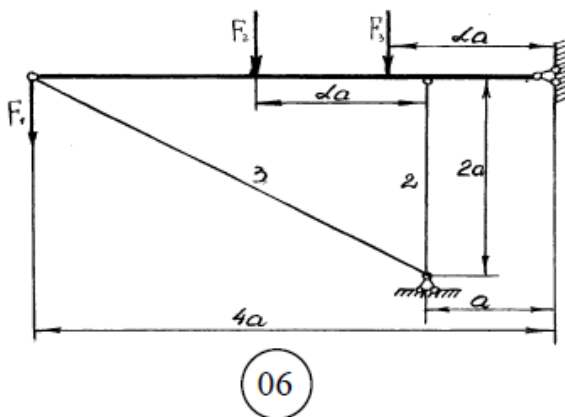
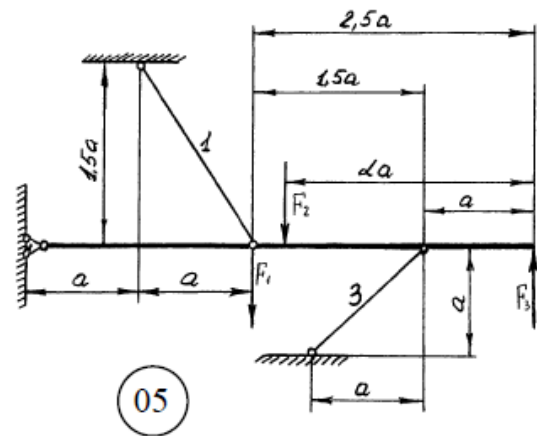
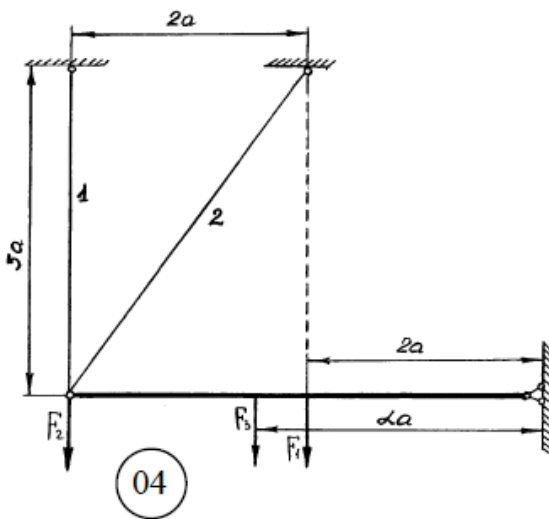
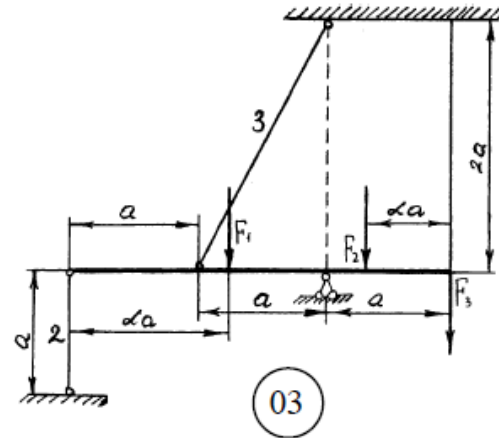
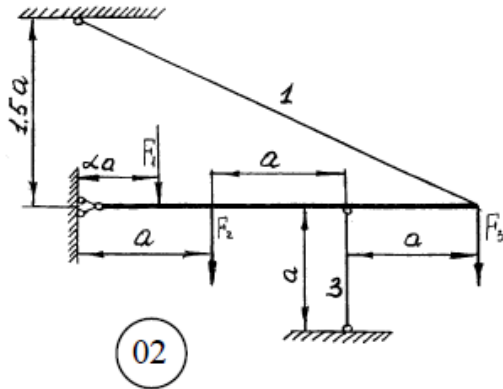
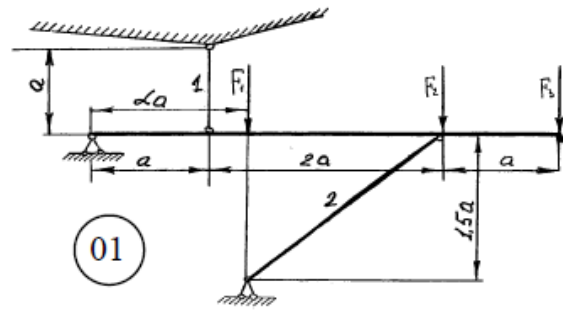
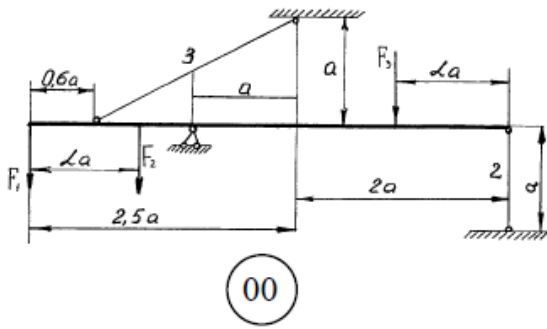
Примітка: механічні характеристики матеріалів див. додатки 1-4

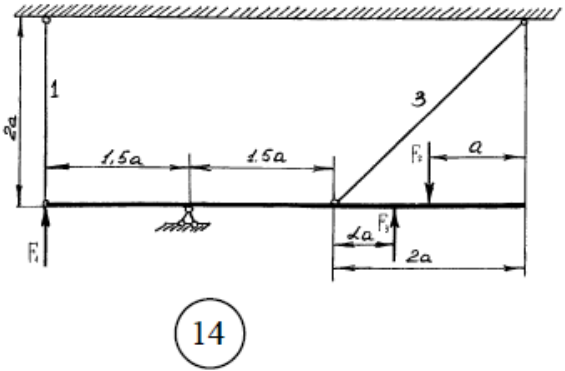
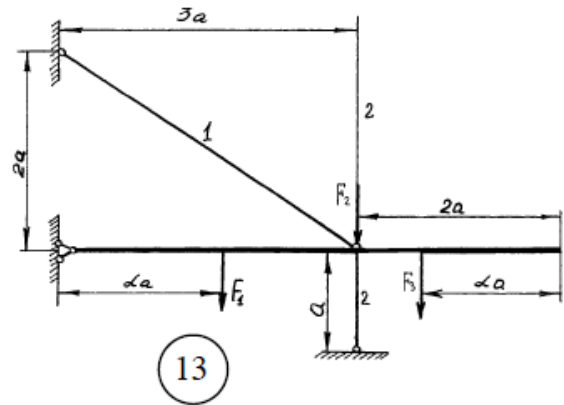
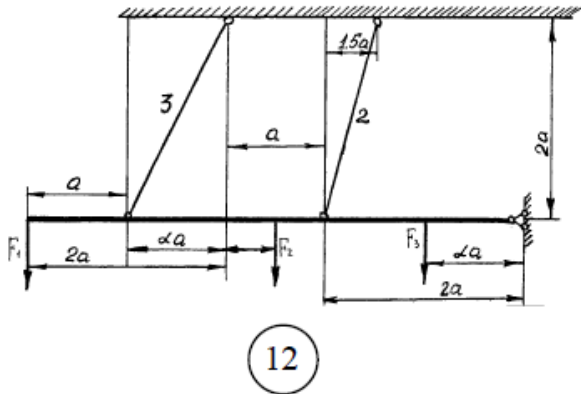
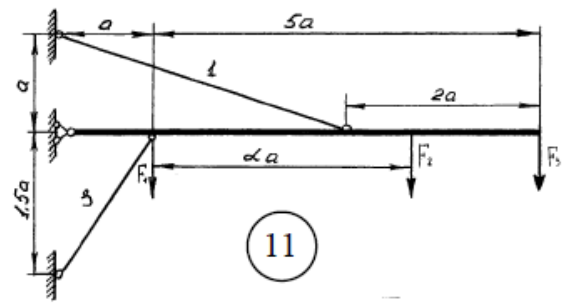
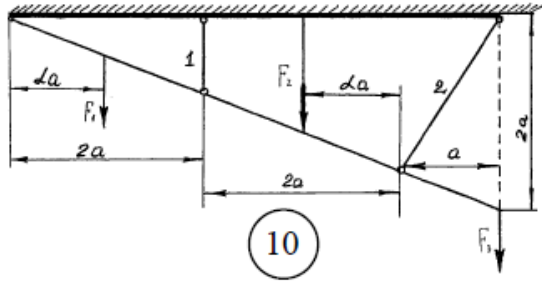
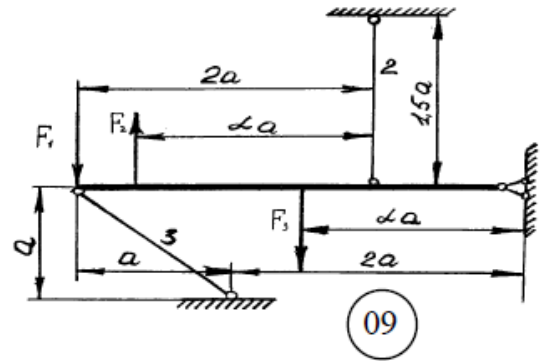
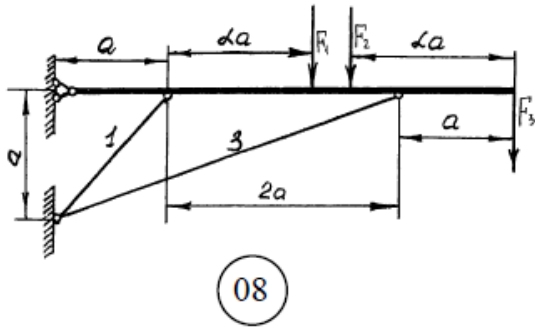
Орієнтовні величини запасу міцності:

Для пластичних матеріалів $1,4 \div 16$

Для крихких матеріалів $2,5 \div 4$

№ п/п	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	α	$A_1:A_2:A_3$	Матеріал
0	0	0	50	0,25	1:1:3	Бр А-5
1	0	-50	0	0,8	3:1:1	Сч 24-48
2	50	0	0	2	1:3:1	Ст-40
3	0	0	40	1,5	1:2:1	Л-68
4	0	40	0	1,6	2:1:3	БрО –10
5	40	0	0	1,25	1:1:2	Ст-30
6	0	-40	0	2	3:1:2	Ст-10
7	0	0	30	1,75	2:3:1	Сч 15-32
8	0	30	0	1,25	1:2:3	Ст-20
9	30	0	0	0,75	1:1:1	Сч 35-56



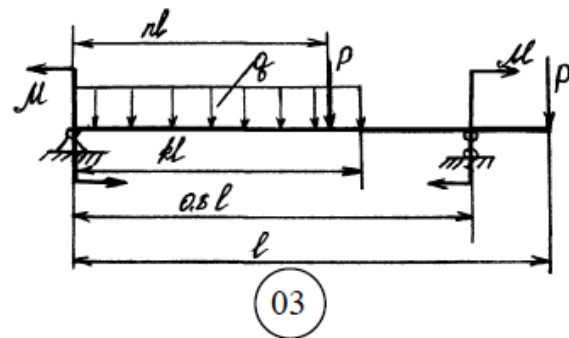
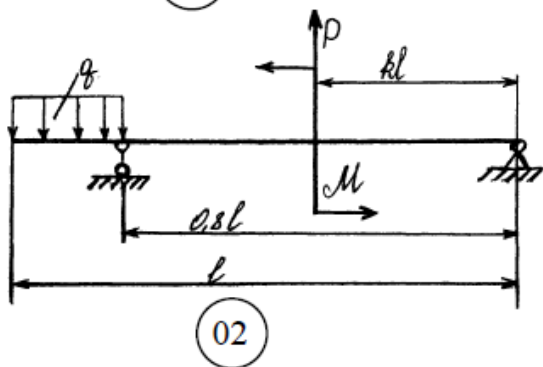
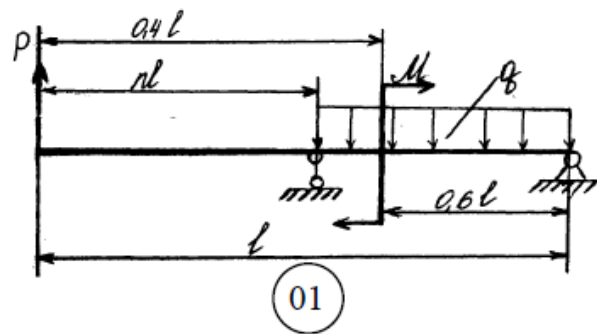
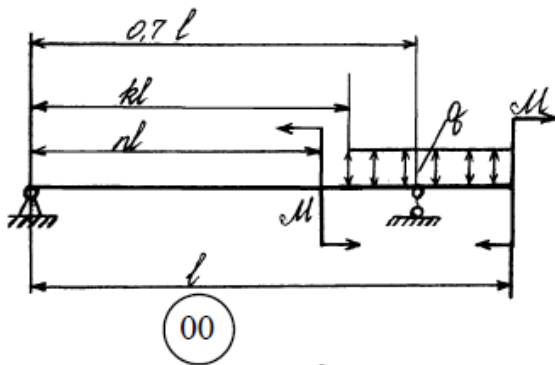


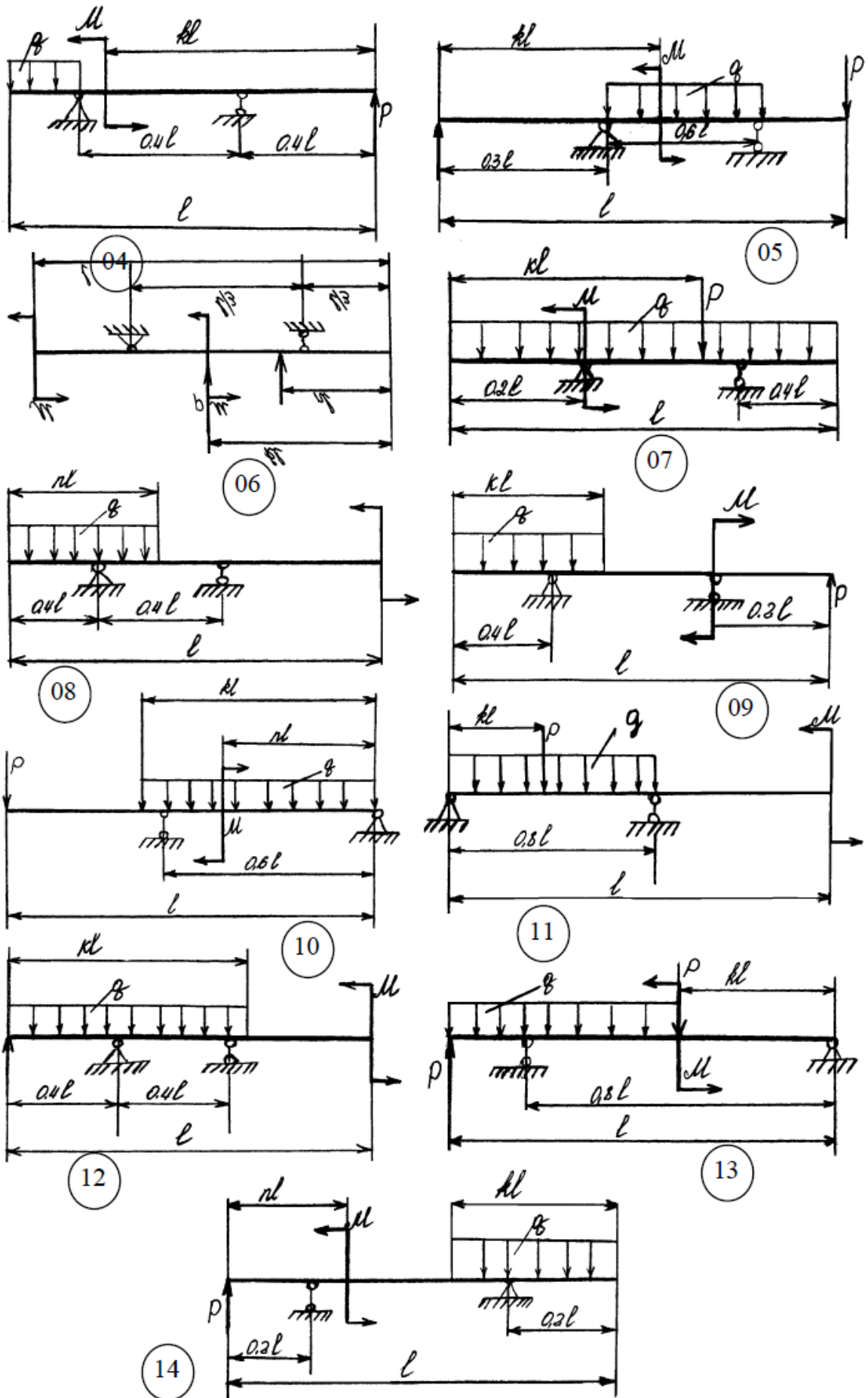
“Розрахунок на міцність балок при згині”

Для заданої балки:

- 1) Підібрати круглий, прямокутний з відношенням висоти до ширини $h:b=2$ і двутавровий переріз.
- 2) Прирівняти вагу одного метра довжини кожного профілю.
- 3) Провести повну перевірку міцності двутаврової балки $l=6\text{м}$.

№ п/п	q, т/м	P, т	M, тм	n	к	Матеріал
0	3	1,2	1,2	1/3	1/6	Ст-3
1	2,5	2	1,6	5/6	1/6	Ст-2
2	2	2	2	1/2	1/3	Ст-2
3	1,5	2,5	2	1/6	1/2	Ст-3
4	3	2	1,4	1/2	5/6	Ст-2
5	2	1,6	1	2/3	5/6	Ст-3
6	1	3	1,5	2/3	1/3	Ст-2
7	2,5	2,4	1,8	2/3	1/6	Ст-2
8	1,5	2,8	2,5	1/3	2/3	Ст-2
9	2	1,8	1	1/2	1/3	Ст-3





“Визначення геометричних характеристик перерізів що складаються з прокатних сортamentів”

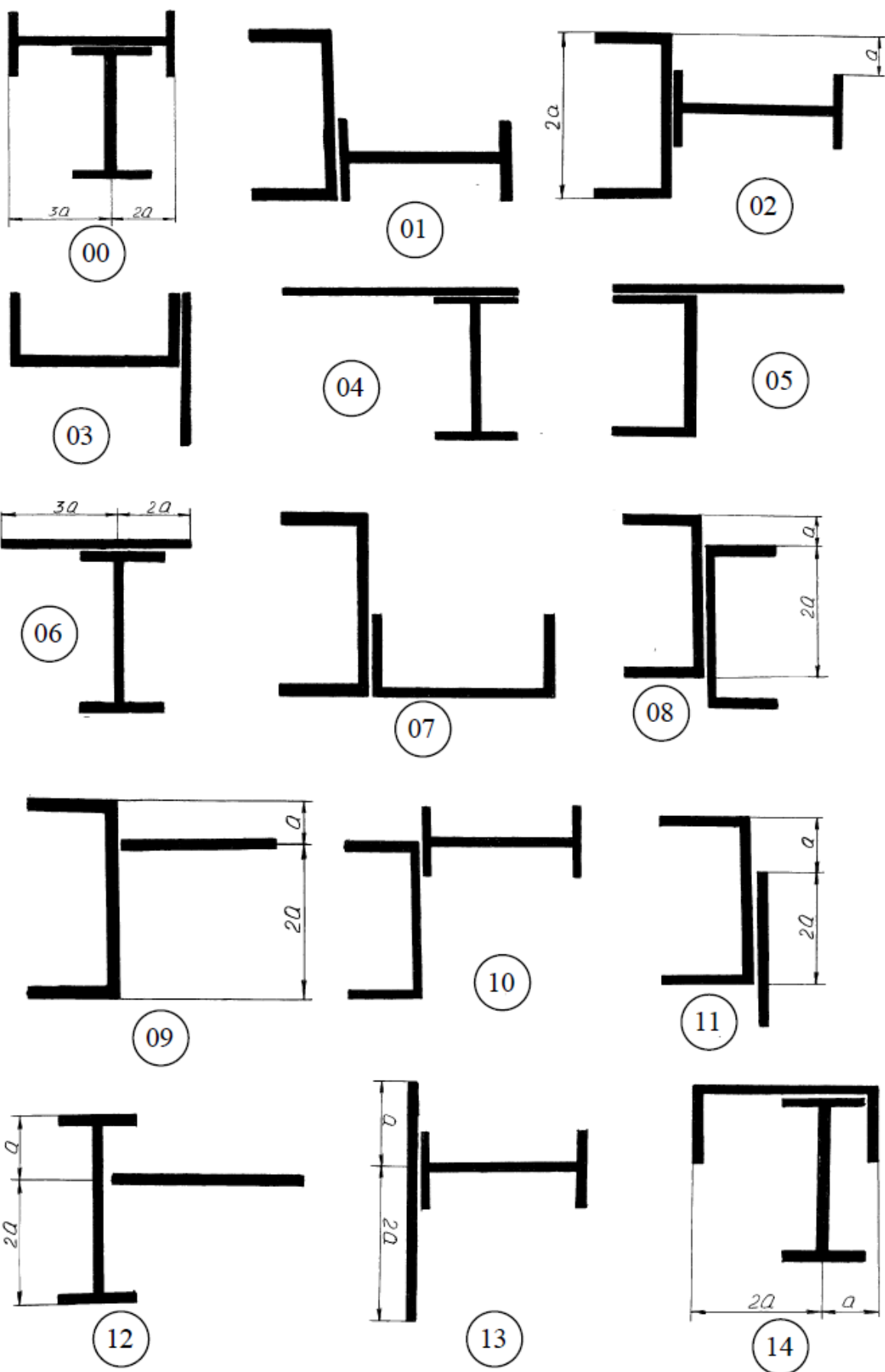
1. Для заданого перерізу визначити користуючись таблицями сортamentів аналітичним способом положення головних центральних осей і величину головних центральних моментів інерції.
2. Визначити момент опору відносно головних осей.

План розв’язку.

1. Накреслити переріз в масштабі.
2. Вписати необхідні для розв’язку дані із таблиць сортименту.
3. Вибрати найбільш раціональне розміщення допоміжних координатних осей.
4. Визначити положення центра ваги перерізу.
5. Провести допоміжні осі, паралельні осям Y і Z і визначити відносно їх величини осьових і відцентрованих моментів інерції.
6. Знайти аналітичну величину головних центральних моментів інерції і положення головних центральних осей.

Всі розміри використані в розрахунку повинні бути вказані на малюнку.

№ п/п	Лист	Швелер №	Двутавр №
0	100-20	36	24
1	100-10	14	12
2	200-10	16	14
3	200-20	18	16
4	300-20	20	18
5	300-10	22	20a
6	200-10	24	20
7	200-20	27	22a
8	200-10	30	22
9	300-10	33	24a

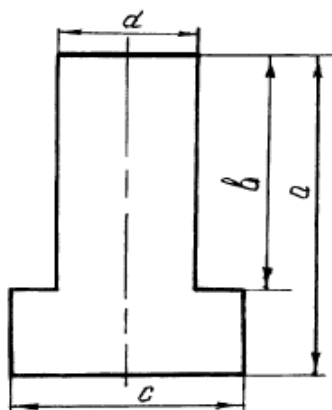


“Поцентровий стиск стержня великої жорсткості”

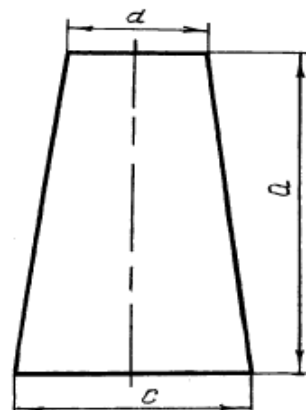
Для жорсткої чавунної колони з заданим поперечним перерізом навантаженої стискаючою силою в точці – р – визначити допустиму величину цієї сили і побудувати просторову епюру нормальних напруг в поперечному перерізі.

Дані для розрахунків взяти в таблиці.
 Прийняти: $b=0.8a$, $C=0.5a$, $d=0.3a$, $n=0.2a$.

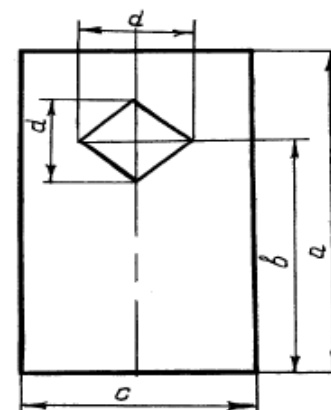
№ п/п	Координати точки -р- в системі головних центральних осей		а, см	Матеріал
	Zp, см	Yp, см		
0	-15	8	60	Сч –12-28
1	12	-6	40	Сч –15-32
2	10	4	80	Сч –18-36
3	-15	-10	60	Сч –21-40
4	14	8	40	Сч –24-44
5	-8	10	80	Сч –28-48
6	18	-9	60	Сч –32-52
7	-15	6	40	Сч –35-56
8	9	-5	80	Сч –38-60
9	14	7	60	Сч –12-28



00



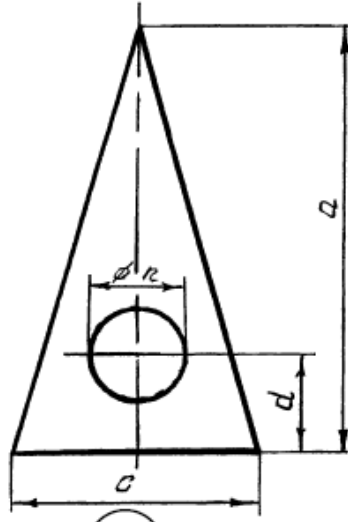
01



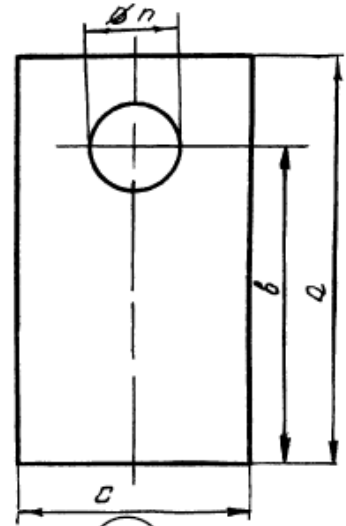
02



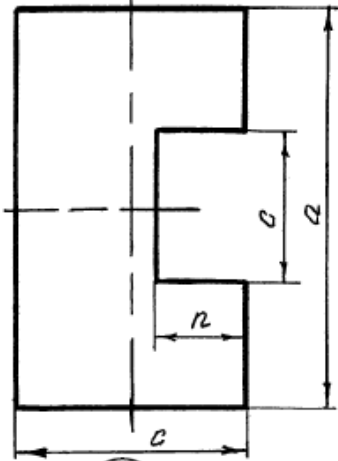
03



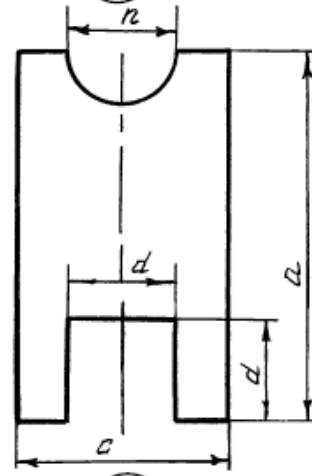
04



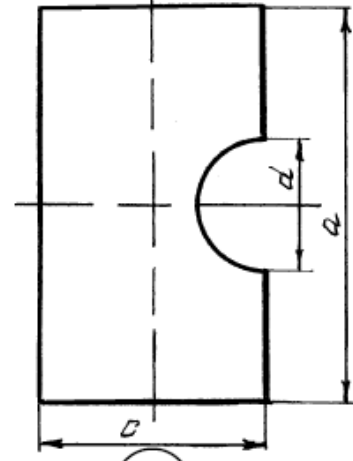
05



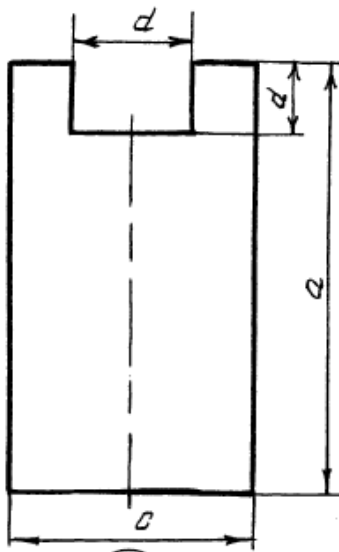
06



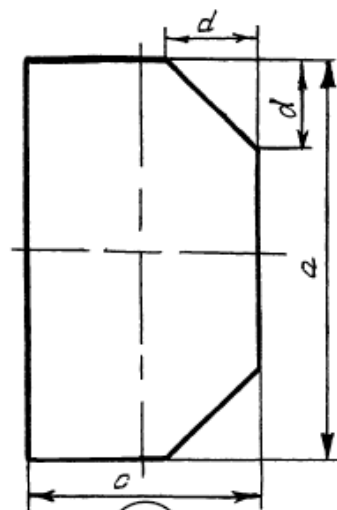
07



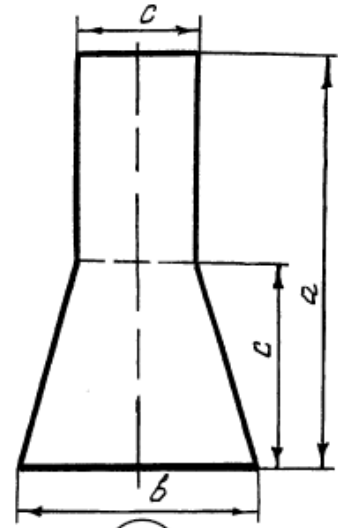
08



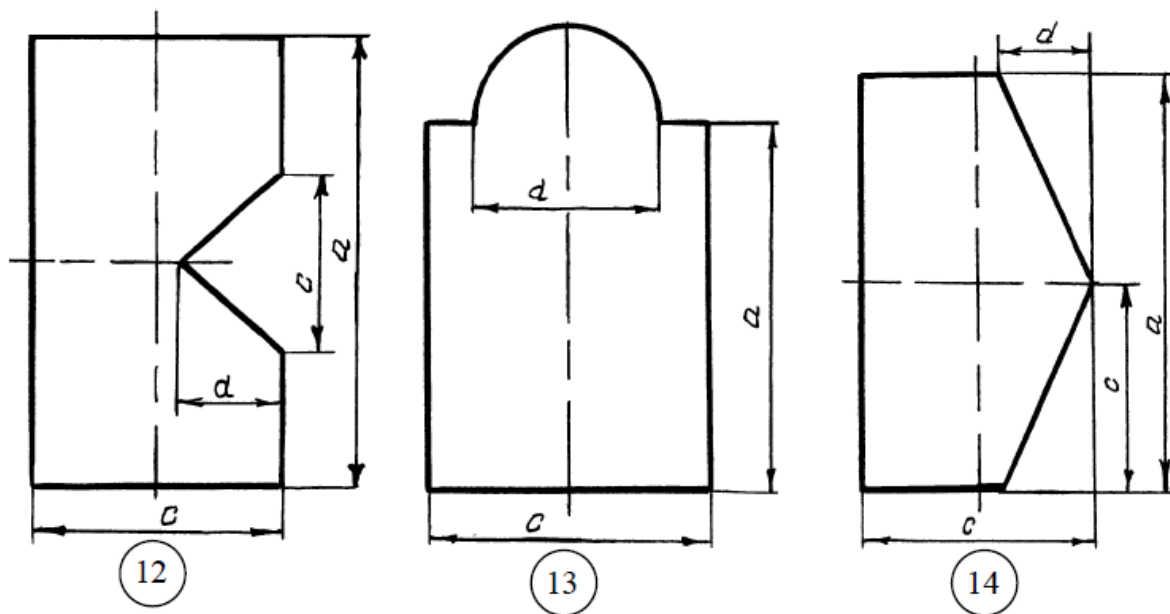
09



10



11

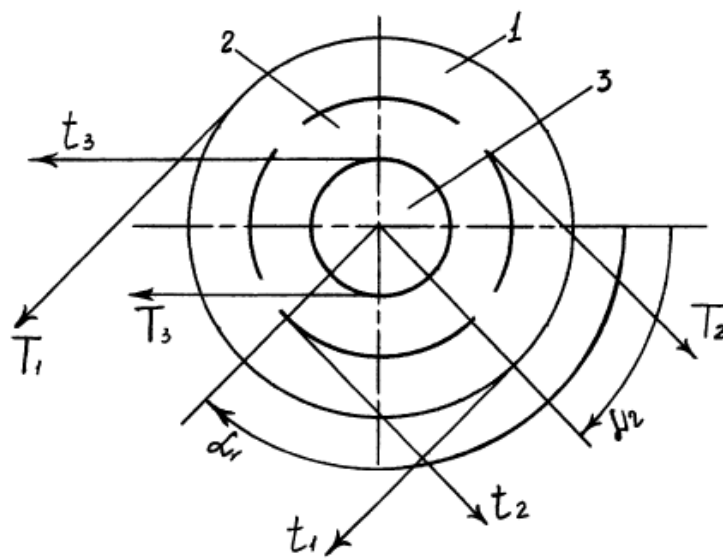
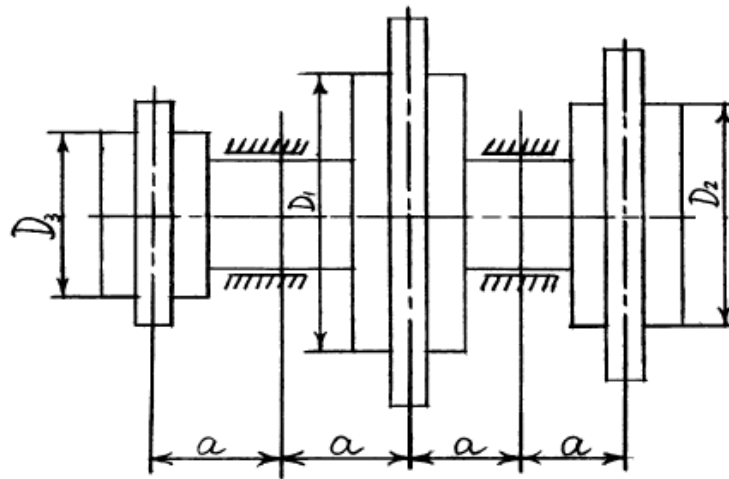


“Розрахунок валу на згин з крученням”

Стальний вал трансмісії обертається з частотою n об/хв і передає через два шківні потужності задані в таблиці. Визначити діаметр вала, якщо діаметр шківів $D_1=60\text{см}$, $D_2=40\text{см}$, $D_3=30\text{см}$, $a=1\text{м}$ $[\sigma]=160\text{МПа}$.

План розв'язку.

1. Визначити потужність і скручуючий момент на кожному шківі. Побудувати епюру крутних моментів.
2. Визначити силу тиску що створюють шківні та вал вважаючи що натяг ведучої частини пасу в 2 рази більший ніж ведомий.
3. Показати на схемі (в аксометрії) розташування сил, що діють на вал. Розкласти їх на горизонтальні і вертикальні складові.
4. Визначити величини складових, які діють в горизонтальній площині.
5. Побудувати епюри згинаючих моментів в горизонтальній і вертикальній площині.
6. Побудувати сумарну епюру згинаючих моментів.
7. Визначити небезпечний переріз. Записати величини згинаючого і крутного моментів в цьому перерізі.
8. Визначити діаметр вала користуючись третьою теорією міцності.

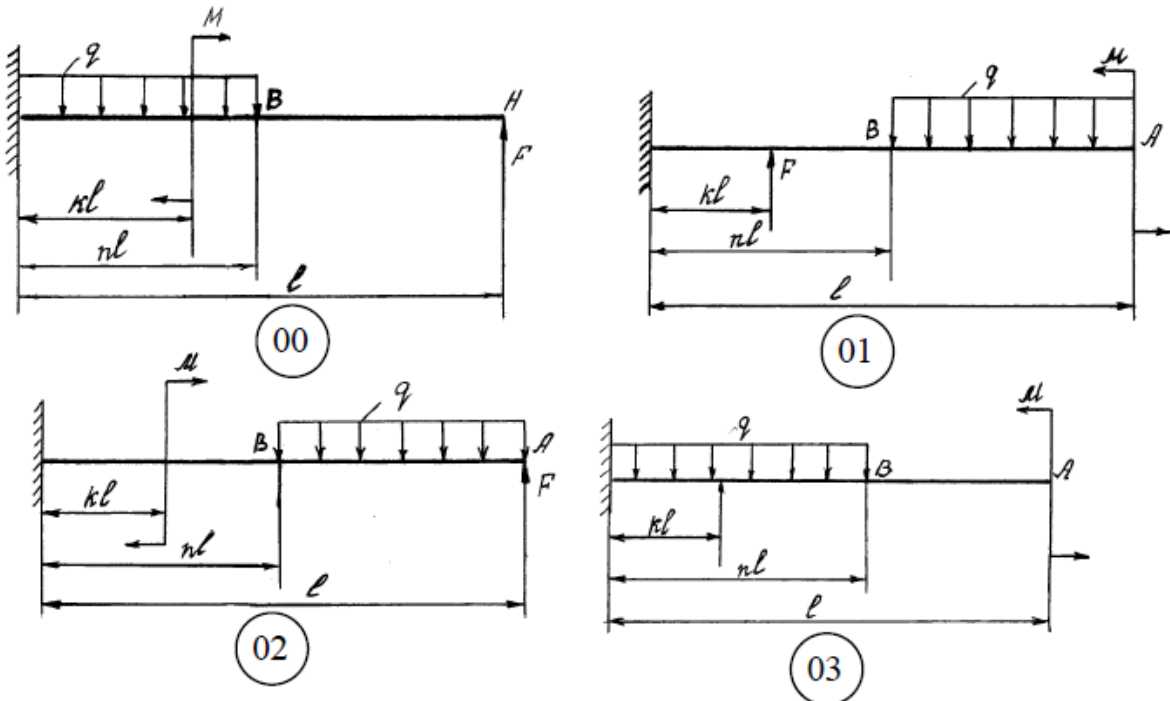


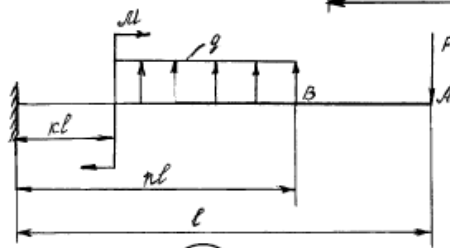
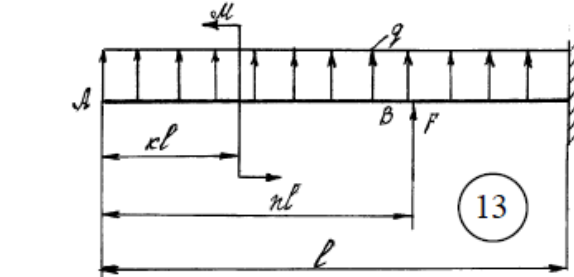
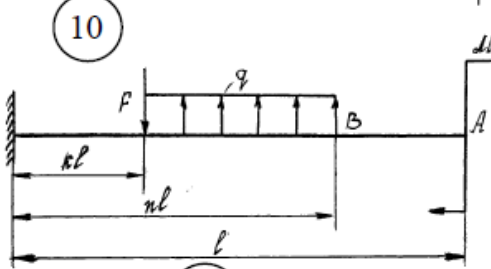
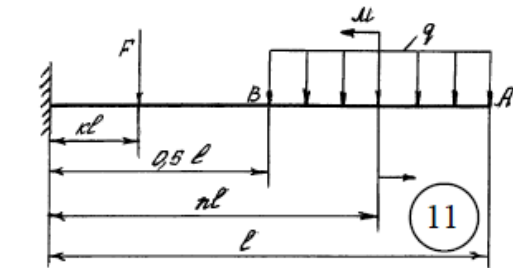
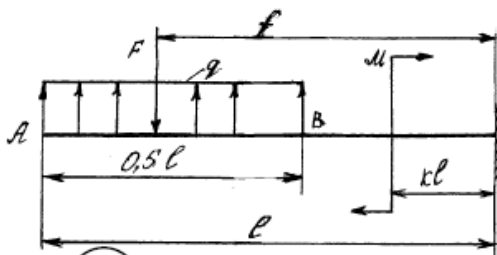
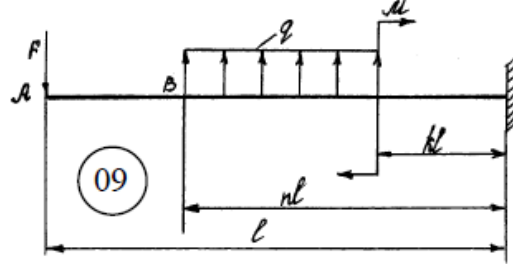
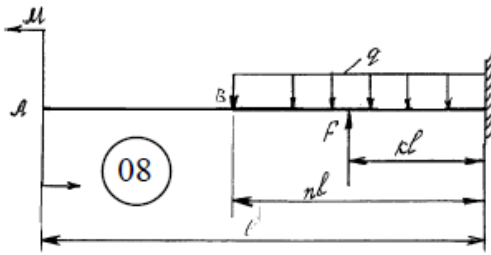
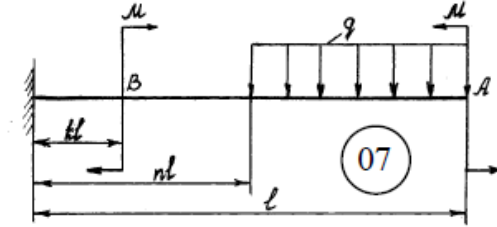
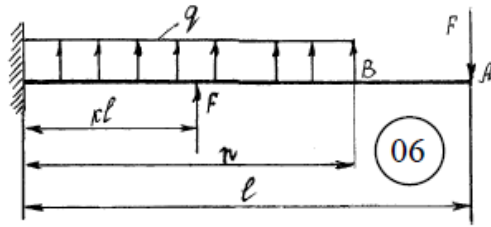
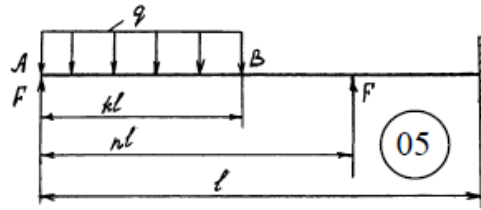
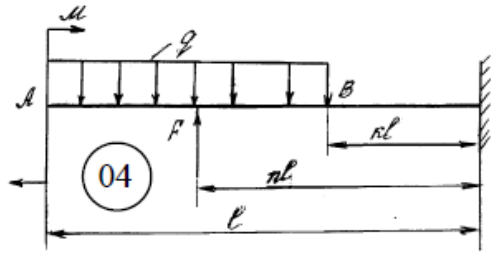
№ п/п	a_1	a_2	n , об/хв	N_1 , кВт	N_2 , кВт	N_3 , кВт
0	150	60	900	-	90	50
1	30	120	1000	-	110	20
2	120	150	400	130	-	40
3	150	120	50	130	40	-
4	80	210	600	-	50	60
5	210	60	700	150	-	60
6	210	30	800	150	60	-
7	30	210	100	110	-	20
8	60	210	300	110	20	-
9	45	135	300	-	30	40

“Визначення переміщень в балці”

Для заданої консольної балки визначити кут повороту перерізу – А – і вертикальне переміщення перерізу – В –. Довжина $l=3\text{м}$.

№ п/п	q, т/м	P, т	M, тм	к	г	Двутавр	Швеллер
0	2	$1/2 ql$	$1/6 ql^2$	1/3	2/3	10	-
1	3	$1/6 ql$	$1/2 ql^2$	1/3	2/3	12	-
2	8	$1/3 ql$	$1/4 ql^2$	2/3	2/3	14	-
3	5	$1/4 ql$	$1/12 ql^2$	2/3	1/3	16	-
4	4	$1/12 ql$	$1/3 ql^2$	1/3	2/3	18	-
5	2	$1/2 ql$	$1/6 ql^2$	2/3	1/3	-	8
6	3	$1/6 ql$	$1/2 ql^2$	2/3	1/3	-	10
7	4	$1/12 ql$	$1/4 ql^2$	1/3	2/3	-	12
8	6	$1/3 ql$	$1/12 ql^2$	2/3	2/3	-	14
9	5	$1/4 ql$	$1/3 ql^2$	1/3	2/3	-	16





14

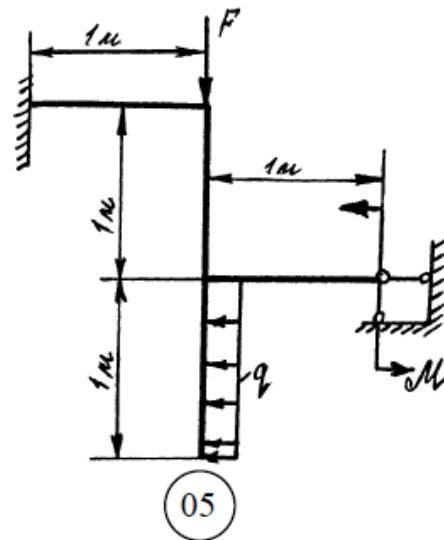
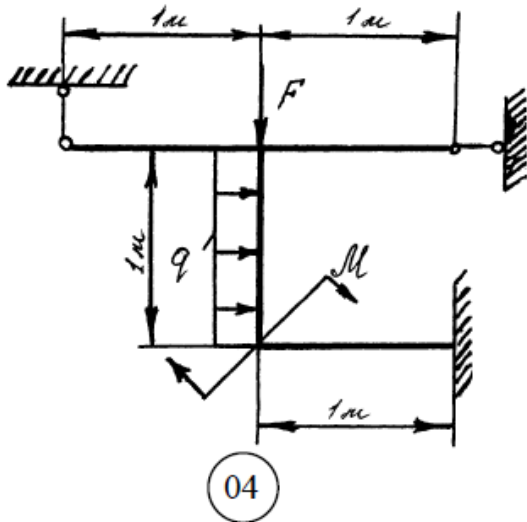
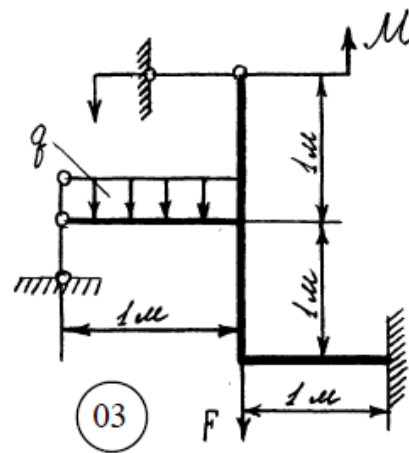
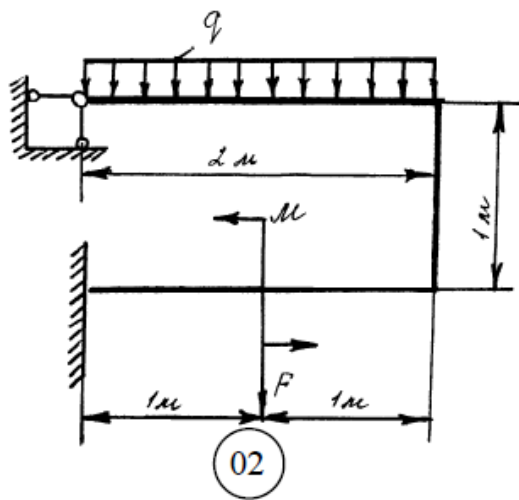
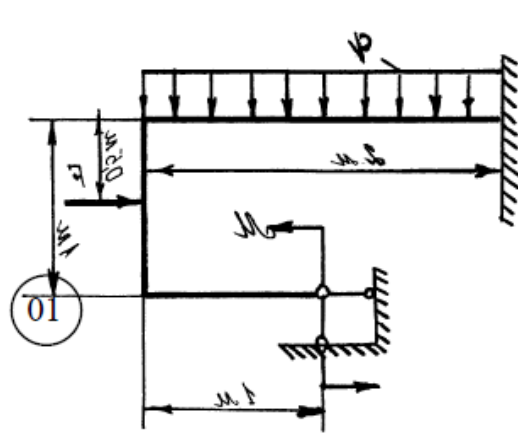
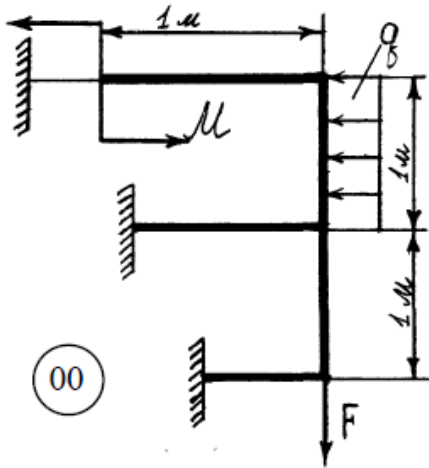
“Розрахунок статично невизначених систем”

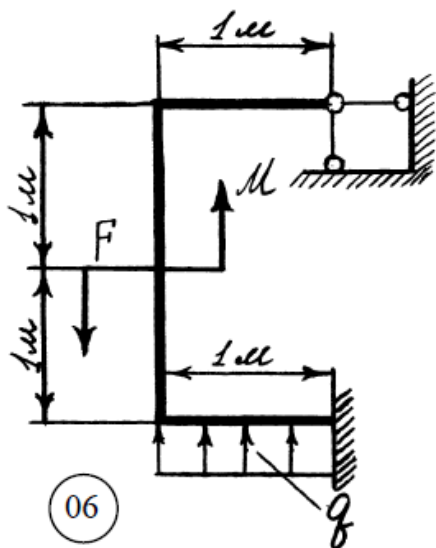
Для заданої статично невизначеної сталюї рами двутаврового перерізу побудувати епюри N , Q і $M_{зг}$. Підібрати номер двутаврової балки, якщо $[\sigma] = 160\text{МПа}$.

План розв'язку.

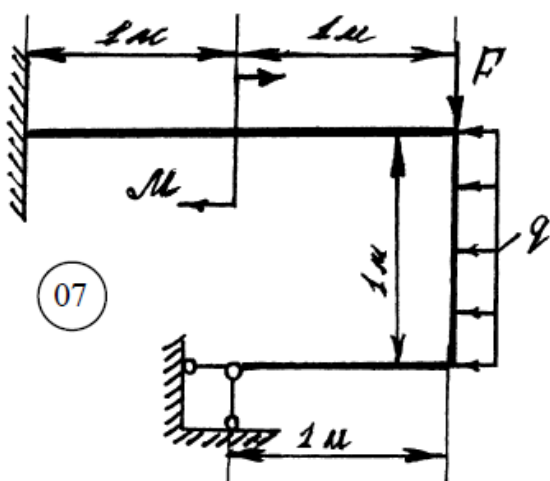
1. Встановити степiнь статичної невизначеності.
2. Вибрати основну і еквівалентну систему.
3. Скласти канонічні рівняння методами сил.
4. Визначити коефіцієнт δ_{ik} і Δ_{ip} , які входять в канонічні рівняння.
5. Розв'язати канонічні рівняння і знайти значення “лишніх” невідомих. Побудувати епюри N , Q і $M_{зг}$.
6. Визначити небезпечний переріз рами і підібрати двутавровий переріз із умови міцності по нормальних напругах

№ п/п	q , кН/м	M , кНм	F , кН
0	20	30	0
1	20	0	30
2	0	40	20
3	20	30	0
4	20	0	40
5	0	20	30
6	20	10	0
7	20	0	10
8	0	60	20
9	20	50	0

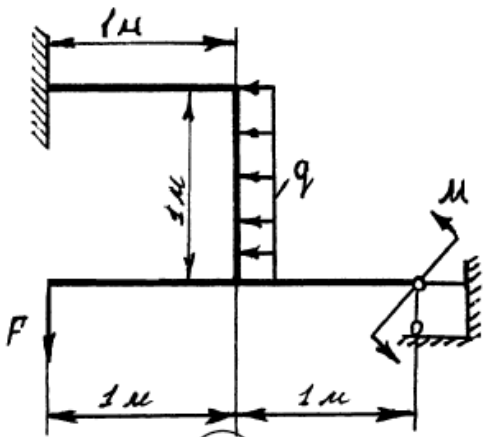




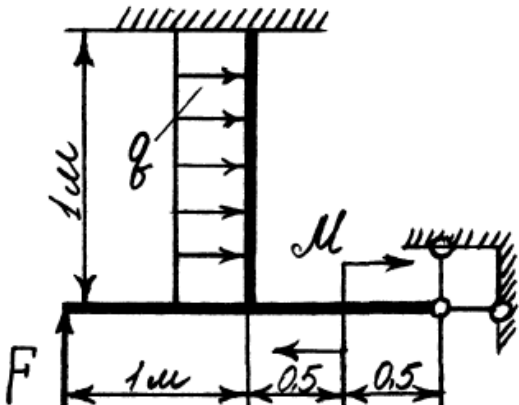
06



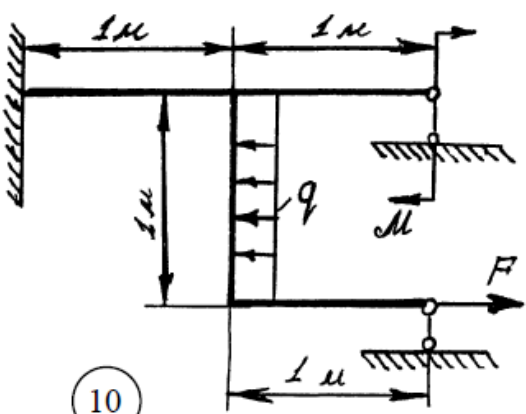
07



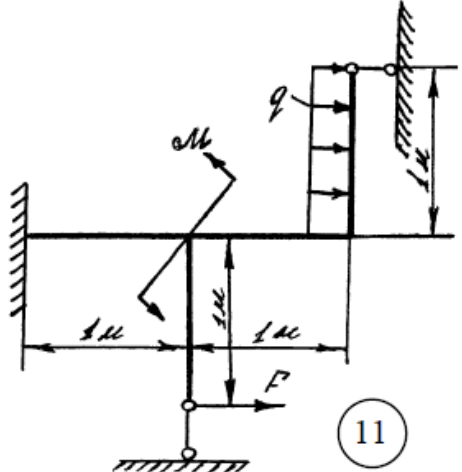
08



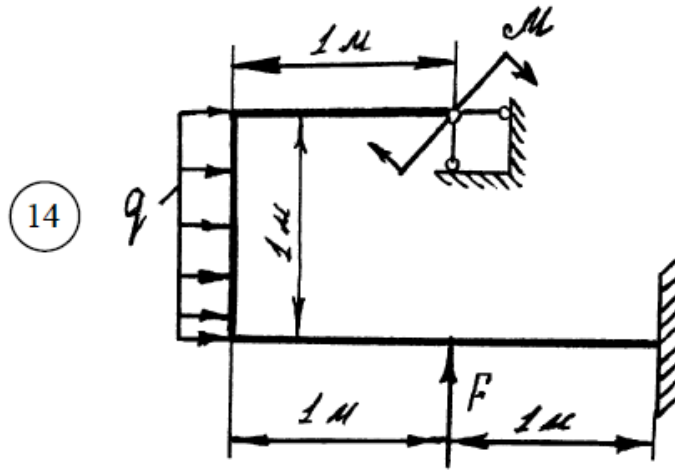
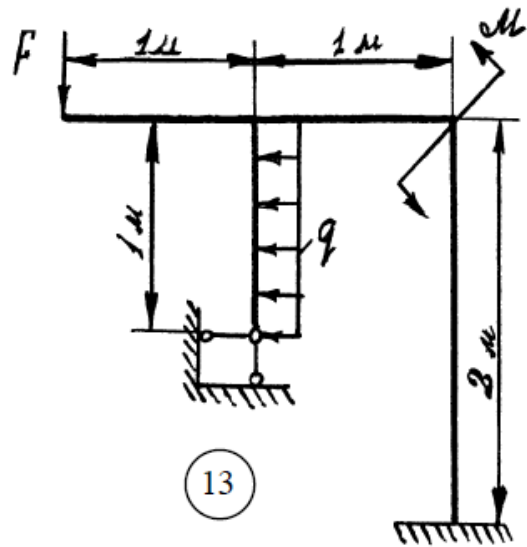
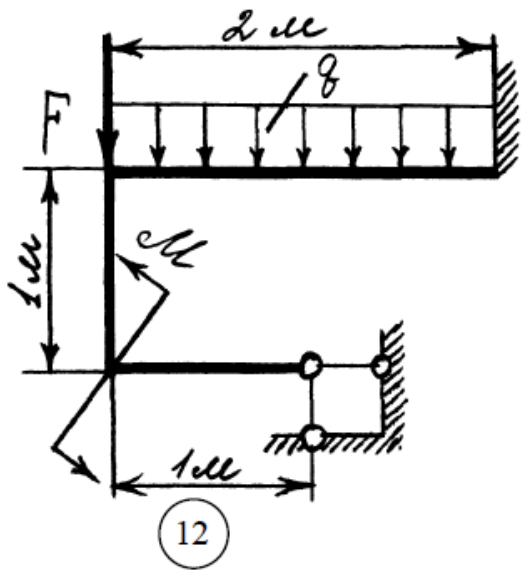
09



10



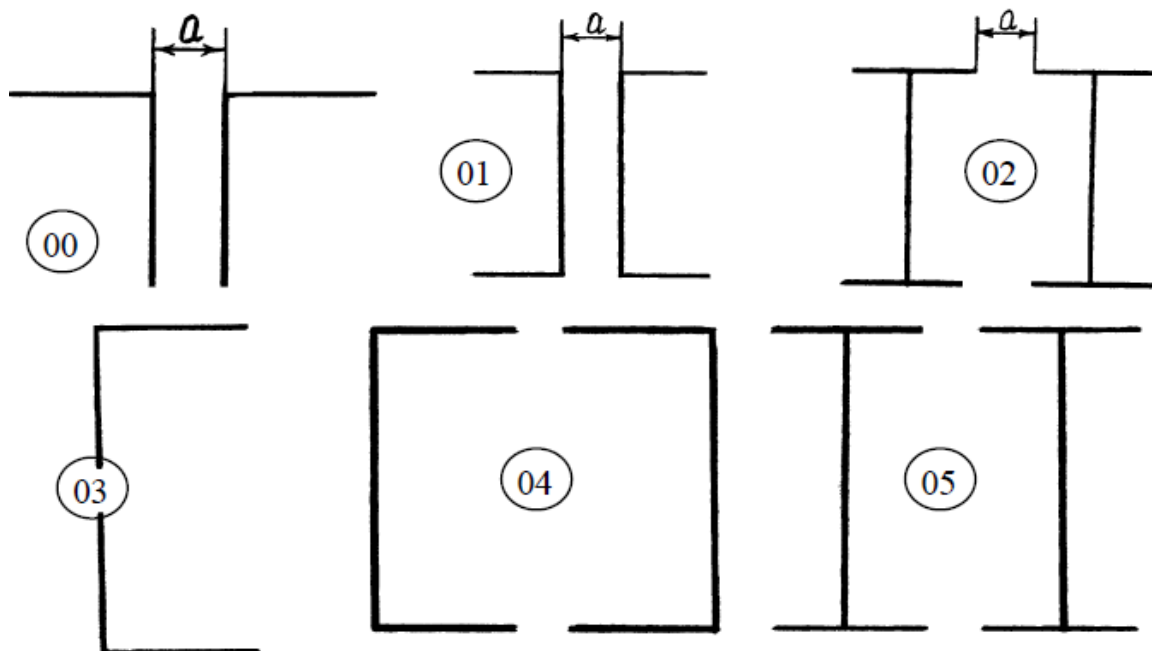
11

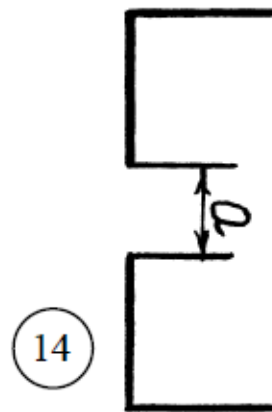
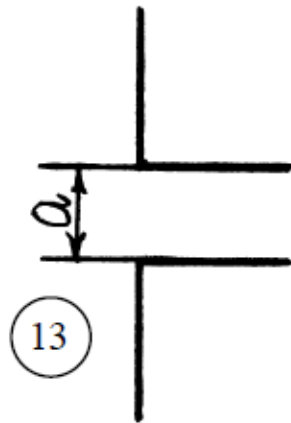
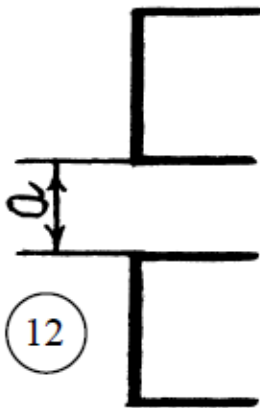
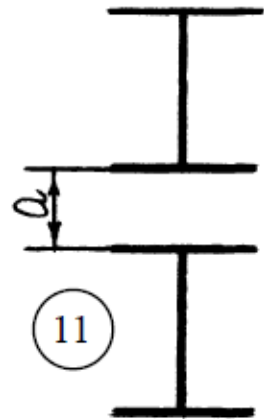
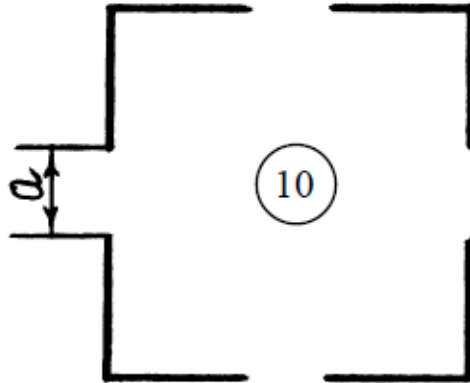
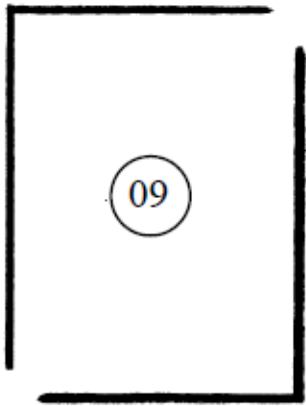
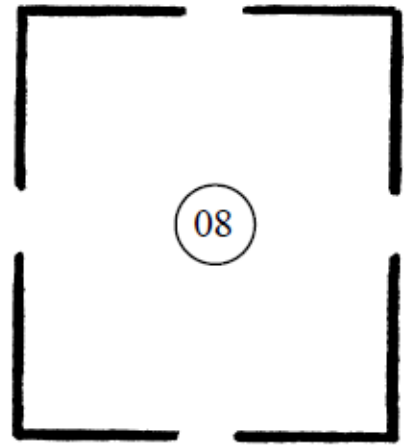
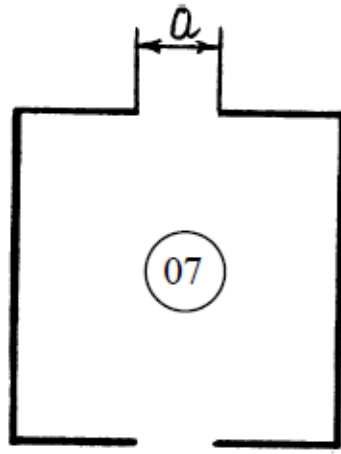
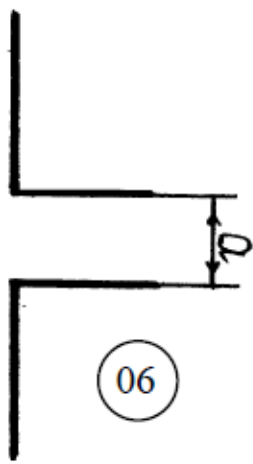


“Розрахунок на стійкість”

Стійку заданого поперечного перерізу розташувати найбільш раціональним способом з урахуванням способу закріплення її кінців. Підібрати елементи перерізу стійки, якщо $[\sigma]=160\text{ МПа}$. В перерізах, де позначено розмір a , взяти $a=10\text{ см}$. Інші розміри, необхідні для розрахунку взяти в таблиці.

№ п/п	F, кН	L, м	Способи закріплення кінців стійки			
			нижній	верхній	нижній	верхній
			Пл, xOz		Пл, xOy	
0	160	9	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
1	180	8	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
2	200	7	шарнір	рухоме защемлення	шарнір	шарнір
3	250	6,5	шарнір	шарнір	защемлення	рухоме защемлення
4	300	6	защемлення	рухоме защемлення	защемлення	шарнір
5	350	5,5	защемлення	шарнір	шарнір	шарнір
6	400	5	шарнір	шарнір	защемлення	шарнір
7	450	4,5	защемлення	вільний	шарнір	шарнір
8	500	4	шарнір	защемлення	защемлення	вільний
9	550	3	шарнір	вільний	защемлення	шарнір



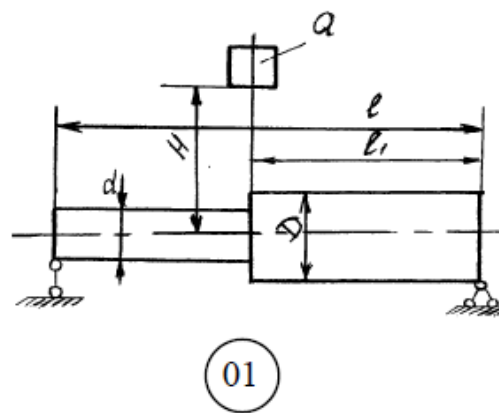
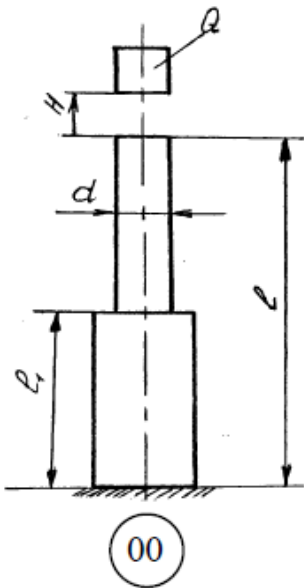


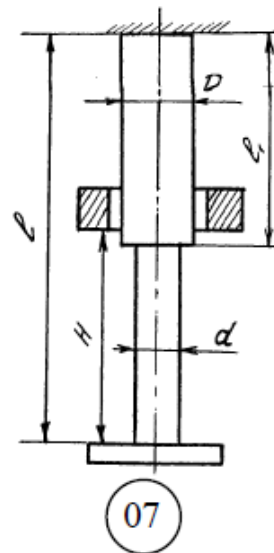
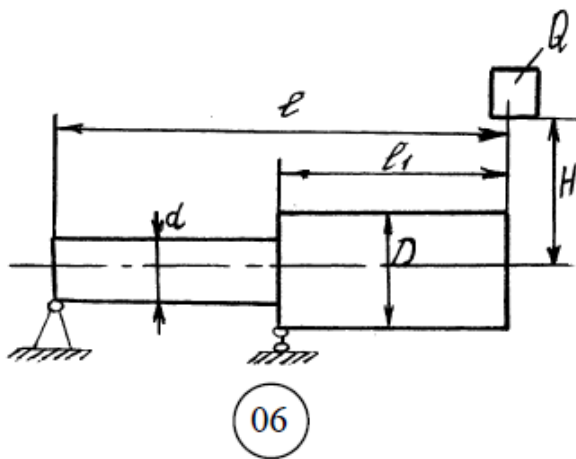
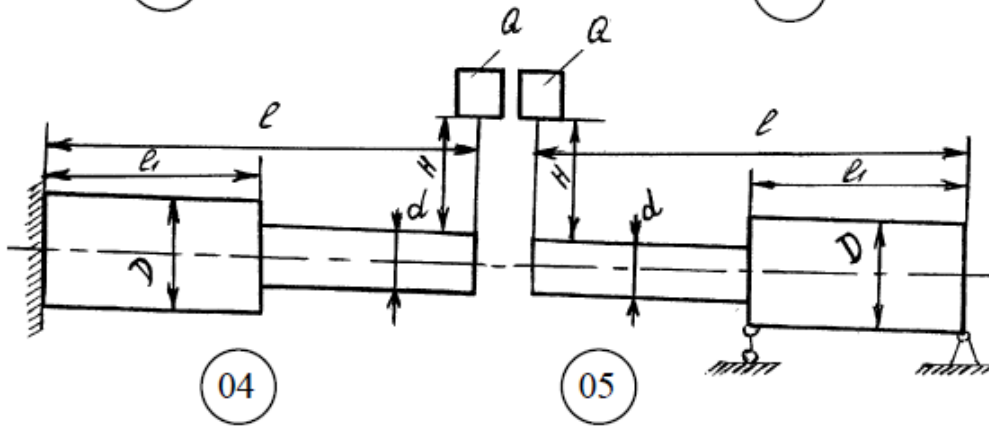
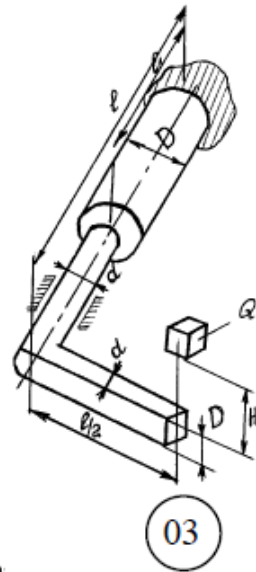
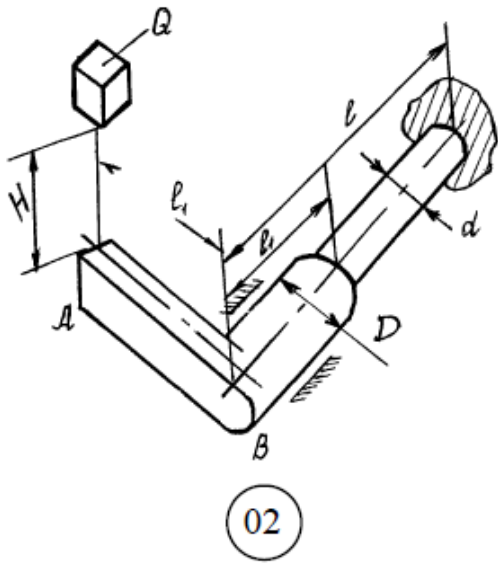
“Розрахунок деформацій і напруг при ударі”

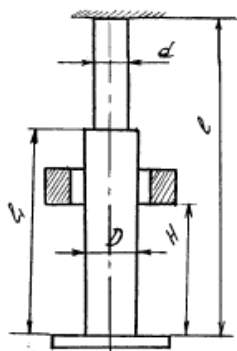
Для пружної системи визначити максимальні напруги, які виникають внаслідок удару по ній вантажу $Q=200\text{Н}$ з висоти $H=0,5\text{м}$. А також величину переміщення в перерізі падіння і по його напрямку. Матеріал сталь, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $l=2 \text{ м}$, $D/d=k$, $d=3\text{см}$.

Примітка: Масою пружної системи при розрахунку знехтувати. В задачах де є стержень АВ, вважати абсолютно жорстким.

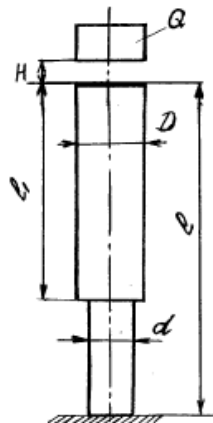
№ п/п	l_1 , м	k
0	0,5	1,2
1	0,6	1,6
2	0,7	1,4
3	0,8	1,8
4	0,9	2,0
5	1,0	2,2
6	1,2	2,4
7	1,5	2,6
8	1,6	2,8
9	1,8	3,0



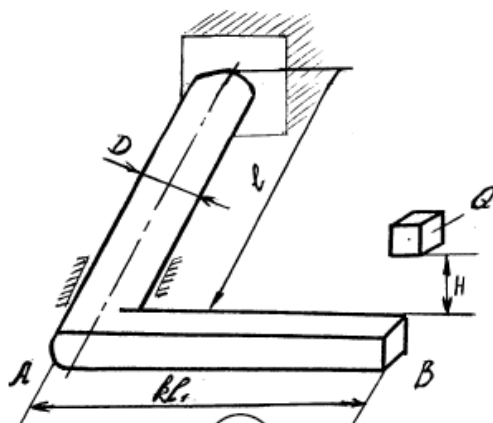




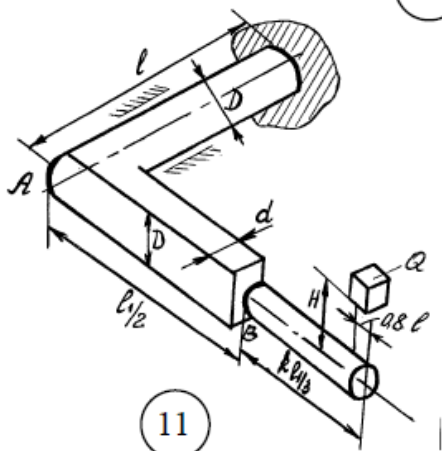
08



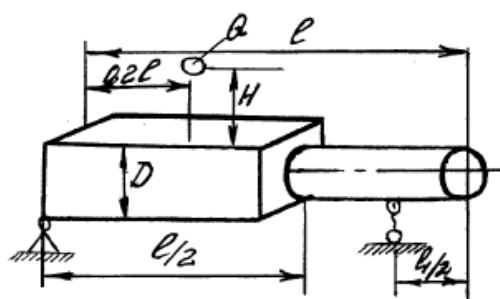
09



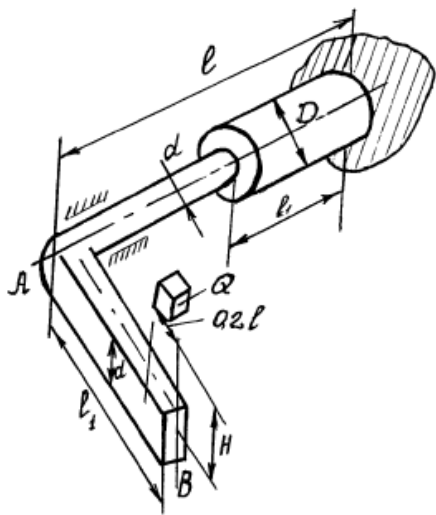
10



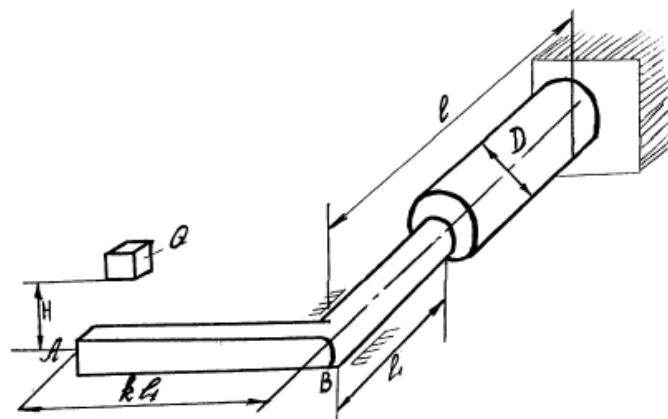
11



12



13



14

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Нахайчук В.Г., Матвійчук В.А., Чернілевський Д.В. Технічна механіка. Книга 2. Опір матеріалів. – Київ: НМК, 1992. – 272с.
2. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С., Сопротивление материалов - К.: Вища школа, 1986. – 775с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов - Киев: Наук. думка, 1988. – 736с.
4. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М: “Наука”, 1972. - 432с.
5. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М: “Наука”, 1965. - 348с.
6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – 15-е изд. – М.: Наука, 1976. - 607с.
7. Ободовский Б.А., Ханин С.Е. Сопротивление материалов в примерах и задачах. – Харьков: “Вища школа”, 1982. – 344с.
8. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высш. шк., 1975. - 654 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1979. - 559с.

Навчальне видання

**КОРОТКИЙ КУРС
ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний
посібник

І. А. Деревенько, Р. І. Сивак

Підписано до друку 2020. Формат 30х42/4.

Папір офсетний. Ризографія. Авт. арк. 5.5

Обл.-вид. арк. 5.5. Тираж 100 прим. Зам. ____.

Підготовлено до друку та надруковано у вищому навчальному закладі
«Вінницький національний аграрний університет».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.21000,
м. Вінниця, вул. Сонячна, 3.
