

Ярошевич Т. С.

Швабюк В. И.

Ярошевич Н. П.

*Луцкий национальный
технический
университет*

УДК 534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕБАЛАНСНОГО ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯ С КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Розглядається задача про рух інерційного віброзбудника під час проходження зони резонансу у випадку, коли коливальна частина системи являє собою тримке тіло, що здійснює малі плоско-паралельні коливання. Одержано вираз для вібраційного моменту.

A question about self-synchronization two nominally identical unstable rotors, set on the resilient beam, is considered. The attention applies on feature of display in the such swaying systems of generalized principle of the autobalancing.

Введение. Перспективным направлением интенсификации многочисленных технологических процессов в различных отраслях промышленности является использование вибрационной техники. Во многих вибрационных машинах и устройствах колебания возбуждаются механическими дебалансными вибровозбудителями, которые приводятся во вращение электродвигателями асинхронного типа. Поскольку упругие опоры таких вибрационных машин, как правило, являются весьма «мягкими», в период разбега существует проблема прохождения через резонанс. На этой стадии движения возможно «застревание» скорости ротора двигателя с ограниченной мощностью, т. е. проявление эффекта Зоммерфельда [1], что влечет за собой существенное увеличение резонансных колебаний и следующих за этим негативных последствий.

Анализ существующих исследований. Эффект Зоммерфельда рассматривается различными методами во многих работах, обзор которых можно найти в [1-9]. В книге [5] показано, что известные закономерности эффекта можно достаточно просто теоретически объяснить и количественно описать путем использования метода прямого разделения движений. Показано, что при таком более грубом, чем в известных работах, подходе, сравнительно легко описать, поведение системы как в до-, так и в послерезонансной области частот вращения ротора. В настоящей работе тот же подход

используется для систем, колебательная часть которых представляет собой твердое тело с плоско-паралельным движением.

Схема системы и уравнения движения. Широкий класс вибрационных машин и устройств может быть идеализирован в виде системы, схематически представленной на рис. 1. Несущее тело (вибрирующий орган машины) считается твердым телом, которое может совершать малые плоско-параллельные колебания, т. е. имеет, в общем случае, три степени свободы. С неподвижным основанием несущее тело связано системой упругих и демпфирующих элементов. На несущем теле установлен неуравновешенный ротор, приводимый во вращение асинхронным электродвигателем или двигателем постоянного тока. Ось ротора возбудителя перпендикулярна плоскости, параллельно которой происходит движение несущего тела.

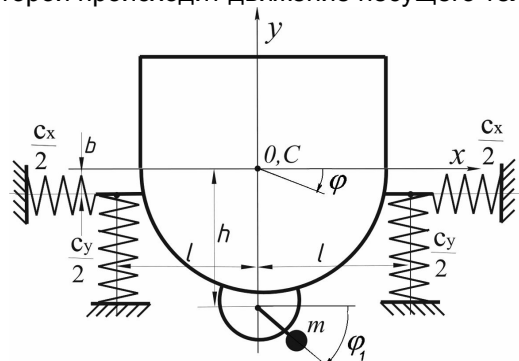
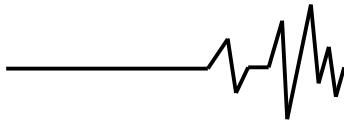


Рис. 1. Схема вибрационной машины с плоским движением рабочего органа



Пусть x и y - координаты центра масс C в неподвижной системе координат xOy , а φ, φ_1 - соответственно, углы поворота несущего тела и ротора возбудителя. Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой колебательной системы запишем в виде

$$I\ddot{\varphi}_1 = L(\dot{\varphi}_1) - R(\dot{\varphi}_1) + m\varepsilon(\ddot{x} \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1 - \dot{\varphi} h \sin \varphi_1), \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x = m\varepsilon(\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1),$$

$$M\ddot{y} + \beta_y \dot{y} + \tilde{n}_y y = m\varepsilon(\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1),$$

$$J\ddot{\varphi} + \beta_\varphi \dot{\varphi} + \tilde{n}_\varphi \varphi = -m\varepsilon h(\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \quad (2)$$

где M - суммарная масса системы; J - момент инерции несущего тела относительно оси, проходящей через центр масс; I - суммарный момент инерции ротора вибровозбудителя относительно его оси вращения; m, ε - соответственно, масса возбудителя и его эксцентриситет; $\beta_x, \beta_y, \beta_\varphi$ - коэффициенты вязкого сопротивления; c_x, c_y - продольная и поперечная жесткости упругих элементов; $c_\varphi = c_y l^2 + c_x b^2$; l, b - параметры, определяющие положение точек крепления верхних концов пружин относительно центра масс несущего тела; h - расстояние от центра масс несущего тела до оси ротора возбудителя; $L(\dot{\varphi}), R(\dot{\varphi})$ - вращающий момент двигателя и момент сил сопротивления вращению.

При записи уравнения (2) для упрощения предположено, что оси x и y являются «главными» как в отношении жесткостей, так и в отношении коэффициентов вязкого сопротивления, т.е. что «перекрестные» значения параметров $c_{xy}, \dots, \beta_{xy}, \dots$ равны нулю; считается также, что поперечные жесткости упругих элементов пренебрежимо малы. Рассмотрение более общего случая используемым ниже методом не вызывает принципиальных затруднений, однако это связано с более громоздкими выкладками.

Основная часть. Для исследования движения ротора дебалансного вибровозбудителя при прохождении зоны резонанса воспользуемся методом прямого разделения движений [5]. В соответствии с основной предпосылкой метода предположим, что рассматриваемые движения могут быть представлены в виде

$$\varphi_1 = \omega t + \psi(t, \omega t), \quad q_i = q_i(t, \omega t), \quad (3)$$

где $\omega = \omega(t)$ - медленная, а ψ и $q_i = x, y, \varphi$ - быстрые функции времени, причем они являются 2π -периодичными по $\tau = \omega t$ и их средние значения за этот период равны нулю; предполагаем также, что $\dot{\psi} \ll \omega$. В формуле (4) угловые скобки указывают на осреднение за период $T = 2\pi$ по быстрому времени $\tau = \omega t$.

Такое представление решений уравнений (1), (2) при исследовании прохождения ротором вибровозбудителя зоны резонанса, когда имеет место проявление эффекта Зоммерфельда, и, соответственно, частота вращения ротора $\dot{\varphi}$ изменяется достаточно медленно, представляется правомерным.

Подставим первое выражение (3) в исходное дифференциальное уравнение (1) и осредним его правую и левую части по быстрому времени τ . Далее, вычитая полученное соотношение из исходного, придем к следующей системе интегродифференциальных уравнений медленных и быстрых движений ротора вибровозбудителя

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + \langle \Phi(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, \varphi_1) \rangle, \quad (4)$$

$$I\ddot{\psi} + k\dot{\psi} = \hat{O}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, \varphi_1) - \langle \Phi(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, \varphi_1) \rangle, \quad (5)$$

где $\Phi(\langle \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}, \varphi_1 \rangle) = m\varepsilon[(\ddot{x} - h\ddot{\varphi}) \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1]$.

При получении этой системы выполнена линеаризация выражений $L(\dot{\varphi}_1), R(\dot{\varphi}_1)$, как в [1], вблизи значения $\dot{\varphi}_1 = \omega$ (где ω - частота «застывания» ротора), причем $k > 0$ - суммарный коэффициент демпфирования.

Согласно методу прямого разделения движений, сначала находят приближенные периодические решения уравнений быстрых движений (2), (5) при постоянных («замороженных») $\omega(t), \dot{\omega}(t)$.

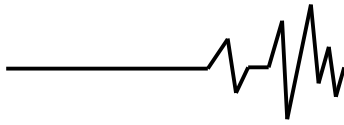
Как и в работах [5, 8], в качестве первого приближения примем $\psi = \psi^{(1)} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_1^{(1)} = \omega t$ и соответствующее периодическое решение уравнений (2):

$$x = x^{(1)} = A_x \cos(\omega t + \gamma_x),$$

$$y = y^{(1)} = A_y \sin(\omega t + \gamma_y),$$

$$\varphi = \varphi^{(1)} = A_\varphi \cos(\omega t + \gamma_\varphi), \quad (6)$$

где p_x, p_y, p_φ - собственные частоты системы;



$$A_x = -\frac{m\varepsilon}{MB_x}, B_x = \sqrt{(1-\lambda_x^2)^2 + 4n_x^2}, \lambda_x = \frac{p_x}{\omega},$$

$$n_x = \frac{\beta_x}{2M\omega},$$

$$A_y = -\frac{m\varepsilon}{MB_y}, B_y = \sqrt{(1-\lambda_y^2)^2 + 4n_y^2}, \lambda_y = \frac{p_y}{\omega},$$

$$n_y = \frac{\beta_y}{2M\omega}, A_\varphi = -\frac{m\varepsilon h}{JB_\varphi}, B_\varphi = \sqrt{(1-\lambda_\varphi^2)^2 + 4n_\varphi^2},$$

$$\lambda_\varphi = \frac{p_\varphi}{\omega}, n_\varphi = \frac{\beta_\varphi}{2J\omega}, \sin \gamma_x = -\frac{2n_x}{B_x}; \sin \gamma_y = -\frac{2n_y}{B_y};$$

$$\sin \gamma_\varphi = -\frac{2n_\varphi}{B_\varphi}.$$

Подставив решения (6) в правую часть уравнения медленных движений (4) и выполнив осреднение, получаем приближенную формулу для, так называемого, вибрационного момента [1, 2]

$$V(\omega) = -(m\varepsilon\omega)^2 \left[\frac{n_x}{MB_x^2} + \frac{n_y}{MB_y^2} + \frac{h^2 n_\varphi}{J B_\varphi^2} \right]. \quad (7)$$

При $\lambda_y = \lambda_\varphi \rightarrow \infty$, т.е. в случае несущего тела с одной степенью свободы, формула (7), как и должно быть, совпадает с соответствующей формулой работы [5].

Уравнение медленных движений ротора вибровозбудителя при прохождении зоны резонанса может быть представлено в виде [5]

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + V(\omega). \quad (8)$$

Частота вращения ротора в стационарных режимах определяется из уравнения $L(\omega) = R(\omega) - V(\omega)$. Решениям этого уравнения отвечают точки пересечения графиков $L(\omega)$ и $M_{сум} = R(\omega) - V(\omega)$, где кривые L соответствуют статическим характеристикам электродвигателя (рис. 2). Согласно рисунку, наличие нескольких резонансных увеличений вибрационного момента может привести к появлению дополнительных точек пересечения по сравнению с системой с прямолинейными колебаниями рабочего органа. Уравнение (8) имеет либо одно $\omega_5^{(1)}$ стационарное решение, либо несколько – три, пять $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ (рис. 2) или даже семь. Таким образом, в системе существует возможность нескольких режимов движения, близких к равномерному вращению и имеющих различные средние угловые скорости. Решение $\omega_1 < p_1$ является дорезонансным, ω_2, ω_3 ($p_1 < \omega_2, \omega_3 < p_3$) – междурезонансными, $\omega_4 > p_3$ – зарезонансным, $\omega_5 \gg p_3$ – «далеко

зарезонансным». Условием устойчивости рассматриваемого режима является неравенство $R'(\omega_*) - V'(\omega_*) > L'(\omega_*)$ [5].

Геометрически это означает, что в точке $\dot{\varphi}_1 = \omega_*$ для устойчивости необходимо, чтобы величина вибрационного момента увеличивалась, а характеристика двигателя уменьшалась или, в случае возрастания последней, тангенс угла наклона касательной к ней должен быть больше чем тангенс угла наклона касательной к кривой момента. Таким образом, решения $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ и $\omega_5^{(1)}$ являются устойчивыми, а ω_2, ω_4 – неустойчивыми. Характеристике L отвечает «застывание» системы с двигателем недостаточной мощности вблизи резонанса на частоте ω_1 (двигатель, выйдя на этот режим в процессе разгона не сможет преодолеть резонансный пик и достичь номинальной угловой скорости), а характеристике L_1 более мощного двигателя отвечает выход на режим движения со скоростью $\omega_5^{(1)}$, близкой к номинальной.

Следовательно, практически имеет место два принципиально разных режима движения: «застывание» системы в резонансной зоне и далеко зарезонансный режим; если мощность двигателя достаточна для разбега, то, как правило, после некоторого торможения в резонансной зоне, система быстро («скачком») переходит на второй стационарный режим, соответствующий угловой скорости $\omega_5^{(1)}$. Естественно, что чем больше мощность двигателя (чем быстрее происходит разгон), тем меньше вибрационный момент и тем выше частота, при которой достигается его наибольшая величина; в случае «застывания» системы вблизи резонанса, вибрационный момент принимает максимальные значения.

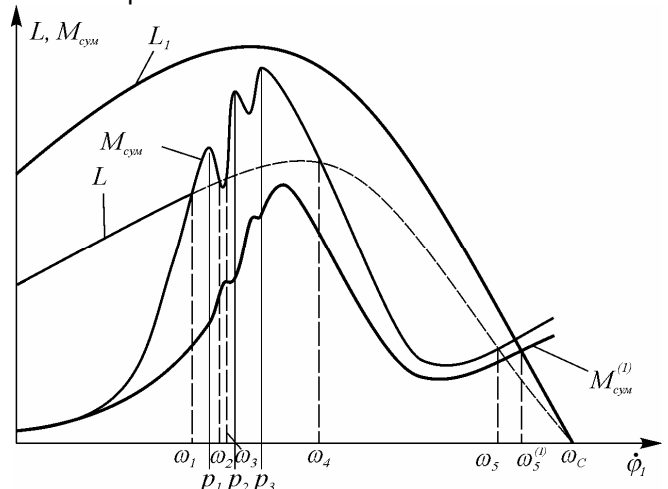
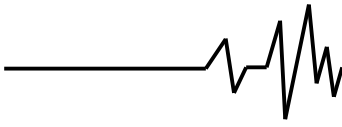


Рис. 2. Стационарные режимы движения



Все слагаемые в формуле (7) отрицательны. Таким образом, как и для системы с одной колебательной степенью свободы, вибраторный момент всегда является тормозящим, т.е. представляет собой дополнительную динамическую нагрузку на ротор двигателя; его зависимость от частоты носит резонансный характер, и поэтому, существенное тормозное действие проявляется в сравнительно узком диапазоне частот.

Учитывая однотипность слагаемых в (7), формулу для вибраторного момента, действующего на ротор вибровозбудителя, можно рассматривать как сумму

$$V(\omega) = \sum_{q=x,y,\varphi} v_q,$$

слагаемые которой

$$v_q = -(m\varepsilon\omega)^2 \frac{n_q}{M_q B_q^2}, \quad (8)$$

являются «частными» вибраторными моментами, характеризующими воздействие q -го колебательного движения (колебательной координаты) на вращение ротора возбудителя (здесь, если $q = x$, или $q = y$, то $M_q = M$; если

$$q = \varphi, \text{ то } M_q = M \frac{\rho^2}{h^2}).$$

Заметим, что выражение (8) для «частного» вибраторного момента может быть представлено в виде [5]

$$v_q = \frac{1}{2} F a_q \sin \gamma_q,$$

где $F = m \varepsilon \omega^2$ – амплитуда вынуждающей силы, развиваемой ротором возбудителя при неподвижном несущем теле,

$a_q = \frac{m\varepsilon}{M_q \sqrt{(1-\lambda_q^2)^2 + 4n_q^2}}$ – амплитуда колебаний платформы, соответствующая q -й колебательной координате.

Как частные, так и общий вибраторные моменты, характеризуют вибраторную связь между колебательными движениями несущего тела и вращательным движением ротора вибровозбудителя.

Согласно формулам (7), тормозящее действие вибрации при пуске тем меньше, чем больше сопротивление системы по колебательным координатам x , y , φ (как и для системы с одной степенью свободы).

Подчеркнем, что величина максимального тормозного вибраторного момента, согласно (7), (8) существенно зависит от частот собственных колебаний системы: уменьшая собственные частоты, можно уменьшить тормозной момент и, как следствие, снизить резонансные амплитуды колебаний, а также снизить мощность двигателя, необходимую для прохождения резонансных частот.

Принимая во внимание зависимость вибраторного момента от собственных частот, можно предположить, что наиболее значительное тормозное действие оказывает частный вибраторный момент v_φ , у которого частота p_φ для рассматриваемого класса вибраторных машин как правило, наиболее высокая (обычно $p_\varphi > p_x \approx p_y$; $p_\varphi \approx p_y l / \rho$, $l > \rho$). Таким образом, например, в случае применения демпфера для снижения интенсивности колебаний во время прохождения резонанса, может быть достаточно установки только демпфера поворотных колебаний.

Поскольку изменение составляющих вибраторного момента носит сильно резонансный характер, то согласно (8), частоты p_x , p_y , p_φ желательно выбирать различными, чтобы тем самым развести во времени максимумы тормозного вибраторного момента, которые отвечают горизонтальным, вертикальным и поворотным колебаниям несущего тела.

Рассмотрим частный случай системы, когда ось неуравновешенного ротора проходит через центр масс рабочей камеры (рис. 3). При этом ось возбудителя и места крепления пружин к рабочей камере находятся в одной плоскости ($b \approx 0$). Таким образом, несущее тело совершает только поступательное движение в плоскости xOy .

В этом случае, согласно (7), при $c_x \approx c_y$, $\beta_x \approx \beta_y$ получается следующее выражение для вибраторного момента

$$V(\omega) = -2 \frac{(m\varepsilon\omega)^2 n_x}{M B_x^2}. \quad (9)$$

Заметим, что формула (9) отличается от приведенной в работе [5] лишь коэффициентом 2. Следовательно, в случае плоских колебаний симметричной системы величина вибраторного момента вдвое больше, чем при прямолинейных колебаниях.

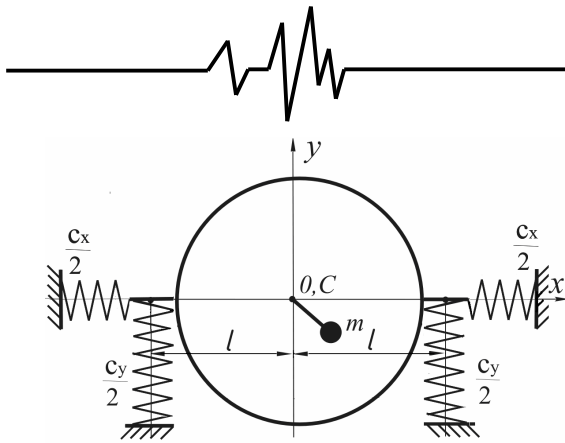


Рис. 3. Колебательная система с центрально установленным вибровозбудителем

Естественно, для схемы, изображенной на рис. 3, частный вибрационный момент v_φ отсутствует и поэтому проблема прохождения резонанса вибрационной машиной с возбудителем, ось которого совпадает с осью центра масс несущего тела (или близка к ней), будет значительно меньше.

Особенностью рассмотренной системы является также отсутствие быстрых колебаний ротора с удвоенной частотой вращения в случае симметрии колебательной части системы.

Полученные результаты подтверждаются численным экспериментом. Параметры системы:

$$M = 39 \text{ } \ddot{a}\ddot{a}, \quad m = 3,2 \text{ } \ddot{a}\ddot{a}, \quad J = 1,2 \text{ } \ddot{a}\ddot{a} \cdot \dot{\imath}^2,$$

$$I = 0,006 \text{ } \ddot{a}\ddot{a} \cdot \dot{\imath}^2,$$

$$\varepsilon = 0,037 \dot{\imath}, \quad l = 0,23 \dot{\imath}, \quad h = 0,27 \dot{\imath},$$

$$c_x = c_y = 45000 \dot{\imath} / \dot{\imath}, \quad \beta_x = \beta_y = 135 \text{ } \ddot{a}\ddot{a} / \dot{\imath},$$

$$\beta_\varphi = 6,75 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

Отметим, что моделирование выполнено с учетом динамической характеристики электродвигателя. При этом использовали трехфазные асинхронные короткозамкнутые двигатели серии 4А с синхронной частотой вращения $n_c = 1500 \dot{\imath} \dot{\imath} / \dot{\imath} \dot{\imath}$.

На рис. 4 изображены зависимости от времени «частных» вибрационных моментов v_x, v_y, v_φ в зоне резонанса для системы с тремя колебательными степенями свободы (рис. 1).

Хорошо видно, что «частный» вибрационный момент v_φ , соответствующий наиболее высокой собственной частоте p_φ , существенно больше остальных «частных» моментов v_x, v_y ($p_x = 33,96 \text{ с}^{-1}$

$p_y = 33,96 \text{ с}^{-1}, p_\varphi = 47,17 \text{ с}^{-1}$). По этой причине для колебательной системы с центральным вибровозбудителем, у которой отсутствуют

поворотные колебания несущего тела, тормозной вибрационный момент при разбеге почти на порядок меньше, чем для системы с возбудителем, установленным под рабочим органом (рис. 5).

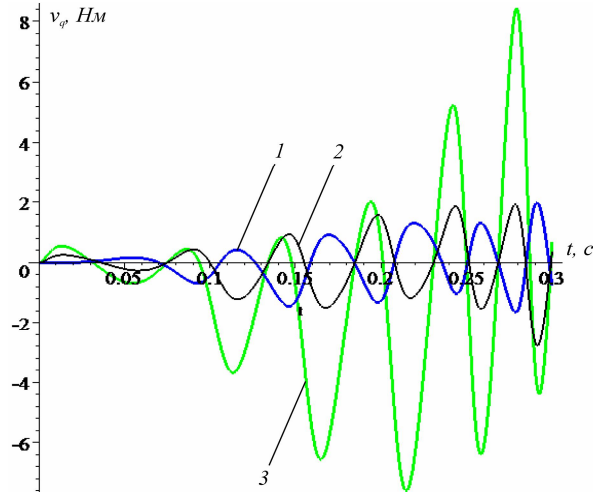


Рис. 4. Изменение «частных» вибрационных моментов в пусковом режиме в случае системы с тремя колебательными степенями свободы:

1 – v_x ; 2 – v_y ; 3 – v_φ

Таким образом, такая колебательная система с точки зрения динамики пуска вибрационной машины есть, безусловно, хуже системы изображенной на рис. 3, поскольку в ней при прочих равных параметрах, разбег двигателя происходит медленнее при больших резонансных амплитудах несущего тела, и, соответственно, для прохождения зоны резонанса необходима значительно большая мощность электродвигателя.

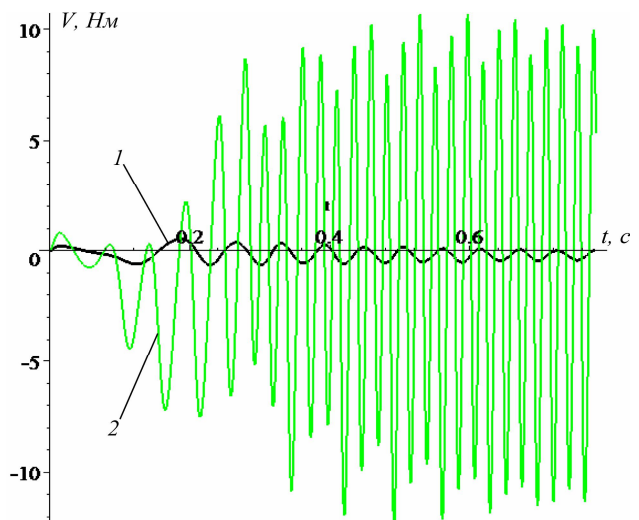
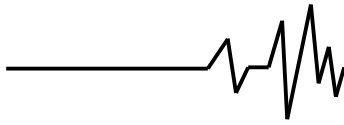


Рис. 5. Изменение вибрационных моментов в случае системы: 1 - с двумя колебательными степенями свободы; 2 - с тремя степенями свободы



Так, для системы с вибровозбудителем, установленным под рабочим органом при рассматриваемых параметрах, разбег и выход на резонансный режим вращения возможен в случае использования электродвигателя мощностью не менее $180 \text{ \AA} \delta$, в то время как для системы с центральным возбудителем достаточно будет двигателя с $N = 90 \text{ \AA} \delta$. Обратим внимание, что при приблизительно одинаковой величине тормозных вибрационных моментов в установившемся режиме движения, размахи колебаний моментов переносных сил инерции, действующих на ротор возбудителя (мгновенных значений вибрационных моментов) для первой схемы на несколько порядков больше (рис. 5). Из сказанного вытекает перспективность конструктивных схем вибромашин с двумя самосинхронизирующимися вибровозбудителями, расположенными соосно по торцам рабочего органа или параллельно вдоль боковых стенок рабочего органа [1].

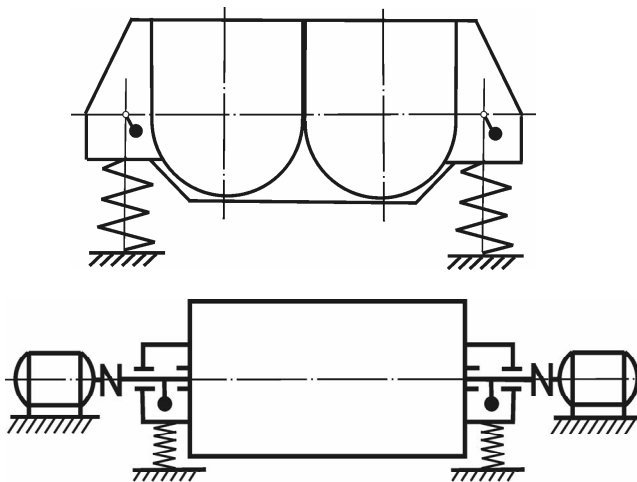


Рис. 6. Вибрационные машины с двумя самосинхронизирующимися вибровозбудителями

Заключение. В работе рассмотрена задача о прохождении зоны резонансных частот при пуске вибрационной машины с инерционным возбуждением колебаний. Изучен случай, когда колебательная часть системы линейна и представляет собой плоско-параллельно колеблющееся твердое тело. Как и в простейшем случае системы с одной колебательной степенью свободы задача сравнительно просто решается путем

использования метода прямого разделения движений.

Получено выражение для вибрационного момента, представляющего дополнительную нагрузку на ротор двигателя, обусловленную колебаниями несущего тела. Предложено рассматривать вибрационный момент в виде суммы частных моментов, которые отвечают каждой из обобщенных координат несущего тела, что обеспечивает удобный анализ влияния параметров системы на динамику разбега вибромашин.

Проведенное аналитическое исследование обнаружило хорошую согласованность с результатами численного моделирования.

Литература

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
2. Колебания нелинейных механических систем. Вибрации в технике. Справочник. Т.2 / Ред. И.И. Блехман – М.: Машиностроение. 1978. – 551 с.
3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 324 с.
4. Алифов Ф.Ф., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
5. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. – 400 с. (англ. перевод: *Vibrational Mechanics*. Singapore, World Scientific. 2000. 509 p.)
6. Fildin A. *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2006. 358 p.
7. Краснопольская Т.З., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М.- Ижевск: НИИ «Регулярная хаотическая динамика», 2008, 280 с.
8. Блехман И.И., Индейцев Д.А., Фрадков А.Л. Медленные движения в системах с инерционным возбуждением колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №1. – С. 25-31.
9. Balthazar J.M., Mook D.T., Weber H.I. et al. An overview on non-ideal vibrations // *Meccanica* 38 (6): 613-621, 2003.