

Тищенко Л. Н.

Ольшанский В. П.

Харьковский
национальный
технический
университет
сельского хозяйства
им. П. Василенка

Ольшанский С. В.

Национальный
технический
университет
«Харьковский
политехнический
институт»

УДК 631.362

**К РАСЧЕТУ ДВИЖЕНИЯ
ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА
ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ**

Рух сходової фракції зернової суміші по поверхні нахиленого решета описано рівнянням потоку в'язкої рідини. Побудовано аналітичний розв'язок цього рівняння гідродинаміки, а також одержано формули для розрахунку профілю швидкості, градієнта швидкості, продуктивності решета та його питомого завантаження.

The motion a vanishing fraction of a grain mix on inclined sieve is described the equation of current of a viscous liquid. The analytical solution of this equation of hydrodynamics is constructed, and also the formulas for account of a structure of velocity, gradient of velocity, productivity sieve and its specific loading are received.

Состояние вопроса и цель исследования. В последнее время для описания движения сыпучей зерновой смеси по поверхности вибрирующего решета используют уравнение ламинарного течения вязкой жидкости [1,2,3]. Избегая сложных и громоздких решений задачи гидродинамики, колебания решета учитывают опосредственно, определяя специально значения кинематического и динамического коэффициентов вибровязкости псевдооживленной сыпучей среды в зависимости от амплитуды и частоты колебаний решета [1,4,5]. Однако, наряду с таким подходом к расчету, имеется возможность в рамках гидродинамической модели теоретически исследовать движение зерновой смеси с учетом непосредственных вибраций плоской поверхности наклонного решета. Реализация этой возможности является целью данной работы.

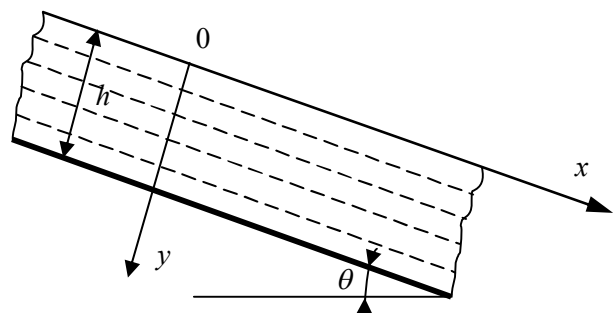
Постановка краевой задачи гидродинамики и ее упрощение. Движение сходовой фракции зерна по решету, которое наклонено под углом θ к горизонту в прямоугольной системе координат xoy , показанной на рисунке 1, описываем двумерными уравнениями Навье-Стокса [6].

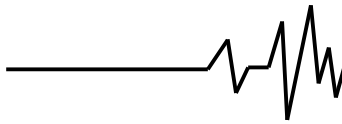
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \\ = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \nabla^2 v \right). \end{aligned}$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор

Лапласа; u, v – проекции скорости на координатные оси ox и oy соответственно; g – ускорение свободного падения; ρ, μ – усредненные плотность и динамический коэффициент вибровязкости смеси; p – давление в смеси; t – время.

**Рис. 1. Расчетная схема**



Пусть колебания решета в своей плоскости ($y = h$) происходят в амплитудой A и частотой ω . Тогда для малых углов θ , когда исключено скольжение смеси по поверхности решета, как и в гидродинамике,

$$u(h) = A\omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

Для сходовой фракции на этой же поверхности имеет место условие непроницаемости

$$v(h) = 0. \quad (3)$$

В установившемся режиме движения смеси, с независимым от x расходом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Поэтому условие неразрывности потока [6]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и граничное условие (3) будут удовлетворены, когда

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

С учетом указанных упрощений уравнения движения (1) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos \theta. \quad (6)$$

Интегрируя (6) получаем распределение давлений в смеси

$$p = \rho g \cos \theta \cdot y + f_1(x)$$

с точностью до произвольной функции $f_1(x)$. На свободной поверхности смеси ($y = 0$) избыточное давление равно нулю. Поэтому

$$f_1(x) = 0; \quad p = \rho g \cos \theta \cdot y; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

На поверхности $y = 0$ нет также нормальных напряжений σ_{yy} , ибо, согласно (4) и (7)

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

При этом на рассматриваемой поверхности должны равняться нулю и касательные напряжения

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

откуда с учетом (4) получаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, определение скорости потока смеси $u = u(y, t)$ сводится к решению уравнения (5) при граничных условиях (2) и (8).

Аналитическое решение упрощенной краевой задачи. Решение уравнения (5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (9)$$

записанного с учетом (7), ищем в виде

$$u(y, t) = f(y) + u_1(y) \sin(\omega t) + u_2(y) \cos(\omega t), \quad (10)$$

где $f(y), u_1(y), u_2(y)$ – некоторые функции координаты y .

Подставив сумму (10) в (9), получаем три уравнения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \theta; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\rho \omega}{\mu} u_1 = 0; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{\rho \omega}{\mu} u_2 = 0. \quad (12)$$

Интегрируя (11), находим его частное решение

$$f(y) = \frac{\rho g}{2\mu} (h^2 - y^2) \sin \theta, \quad (13)$$

которое удовлетворяет нулевым краевым условиям:

$$f(h) = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Решая уравнения (12), получаем

$$\begin{aligned} u_1(y) &= -c_1 sh(\lambda y) \sin(\lambda y) + c_2 ch(\lambda y) \cos(\lambda y); \\ u_2(y) &= c_1 ch(\lambda y) \cos(\lambda y) + c_2 sh(\lambda y) \sin(\lambda y). \end{aligned} \quad (14)$$

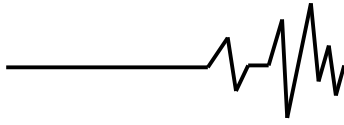
Здесь $\lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\mu}}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Поставив решения (13), (14) в (10) и удовлетворив граничным условием (2) и (8), находим константы:

$$c_1 = -A\omega \frac{sh z \sin z}{\cos^2 z + sh^2 z};$$

$$c_2 = A\omega \frac{ch z \cos z}{\cos^2 z + sh^2 z},$$

где $z = \lambda h$.



В итоге получаем формулу скорости потока

$$u(y, t) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (h^2 - y^2) + \frac{A\omega}{\sqrt{\cos^2 z + sh^2 z}} \times [ch(\lambda y) \cos(\lambda y) \sin(\omega t - \varphi) + sh(\lambda y) \sin(\lambda y) \cos(\omega t - \varphi)] \quad (15)$$

или в свернутом виде

$$u(y, t) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (h^2 - y^2) + \frac{A\omega \sqrt{\cos^2(\lambda y) + sh^2(\lambda y)}}{\sqrt{\cos^2 z + sh^2 z}} \times \sin[\omega t - \varphi + \alpha(y)]. \quad (16)$$

Здесь

$$\varphi = \text{arc tg}(th z \cdot \text{tg } z);$$

$$\alpha(y) = \text{arc tg}[th(\lambda y) \cdot \text{tg}(\lambda y)].$$

Второе слагаемое в (16) с множителем A учитывает влияние вибраций решета на скорость движения зерновой смеси. Оно равно нулю когда $A = 0$ или $\omega = 0$.

Фаза колебаний скорости частицы зависит от глубины расположения частицы в слое, т.е. от значения $\alpha(y)$.

На свободной поверхности $y = 0$ скорость смеси представляется более компактной формулой

$$u(0, t) = \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{2\mu} + \frac{A\omega \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\cos^2 z + sh^2 z}}, \quad (17)$$

из которой следует, что влияние вибраций решета на $u(0)$ ослабевает с увеличением параметров: h, ρ , а также с уменьшением коэффициента динамической вязкости μ и амплитуды колебаний решета A .

В высокочастотном режиме колебаний, когда $z \gg 1$, $sh z \gg \cos z$, вместо (17) можно использовать аппроксимацию

$$u(0, t) \approx \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{2\mu} + \frac{A\omega}{sh z} \sin(\omega t - \varphi). \quad (18)$$

Об интенсивности сегрегации смеси при ее движении обычно судят по величине модуля градиента скорости потока, который в соответствии с решением (15) представляется выражением

$$|\text{grad } u| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left| \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + \right.$$

$$\left. + \frac{A\omega \lambda \sqrt{2} \sqrt{sh^2(\lambda y) + \sin^2(\lambda y)}}{\sqrt{\cos^2 z + sh^2 z}} \times \sin \left[\omega t - \varphi - \frac{\pi}{4} - \beta(y) \right] \right|. \quad (19)$$

Здесь

$$\beta(y) = \text{arc tg}[th(\lambda y) \cdot \text{ctg}(\lambda y)].$$

На свободной поверхности смеси

$\beta(0) = \frac{\pi}{4}$, $|\text{grad } u| = 0$, что согласуется с граничным условием (8).

Согласно решению (19) модуль градиента скорости смеси имеет наибольшее значение в области контакта смеси с решетом, т.е. при $y = h$. Его вычисление в высокочастотном режиме колебаний сводится к компактной формуле

$$\max |\text{grad } u| \approx \left| \frac{\rho g h \sin \theta}{\mu} + A\omega \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}} \sin \left(\omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \right|.$$

Амплитуда колебаний градиента скорости смеси возрастает с увеличением параметров A, ρ, ω и с уменьшением μ , при этом она нелинейно (в степени 3/2) зависит от частоты колебаний решета. Таким образом, увеличением частоты колебаний решета сопутствует интенсификации перемешивания семян в смеси.

Производительность решета Q , с шириной сепарирующей плоскости H , находим интегрированием

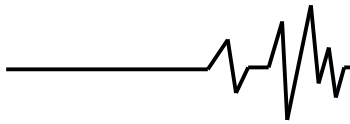
$$Q = H \cdot \int_0^h u(y) dy. \quad (20)$$

Подставив решение (15) в (20), с учетом того, что

$$\int_0^h ch(\lambda y) \cos(\lambda y) dy = \frac{1}{2\lambda} (ch z \sin z + sh z \cos z);$$

$$\int_0^h sh(\lambda y) \sin(\lambda y) dy = \frac{1}{2\lambda} (ch z \sin z - sh z \cos z),$$

получаем



$$Q = H \left[\frac{\rho g h^3}{3\mu} \sin \theta + \frac{A\omega\sqrt{sh^2 z + \sin^2 z}}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 z + sh^2 z}} \times \sin \left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{4} + \gamma \right) \right]. \quad (21)$$

Здесь $\gamma = \arctg [tg(z) \cdot ch(z)]$.

При учете колебаний решета его производительность оказывается периодической функцией времени.

Формулу (21) можно упростить для высокочастотного режима колебаний, когда $z \gg 1$, $shz \gg \sin z$, $shz \gg \cos z$; $\gamma - \varphi \rightarrow 0$. В этом случае

$$Q \approx H \left[\frac{\rho g h^3}{3\mu} \sin \theta + A \sqrt{\frac{\mu\omega}{\rho}} \times \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (22)$$

К увеличению амплитуды колебаний производительности решета приводят увеличения A, ω, μ и уменьшение ρ , что согласуется с физическими представлениями о процессе движения.

Удельная нагрузка q решета с длиной сепарирующей поверхности L представляется выражением

$$q = \rho \frac{Q}{HL}$$

и ее вычисление также не вызывает затруднений.

Численные результаты и выводы.

Расчеты проведены для смеси пшеницы при следующих исходных данных: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,008 \text{ м}$; $\theta = 8^\circ$; $A = 0,0075 \text{ м}$. Рассматривалось два режима колебаний решета с частотами: $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ и $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$. Коэффициент вибровязкости смеси μ полагали зависящим от ω . Для первого режима колебаний принимали $\mu = 0,0520 \text{ Па}\cdot\text{с}$, а для второго – $\mu = 0,0385 \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Вычисленные по формуле (16) значения $u(y,t)$ при $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ и различных y графически показаны на рисунке 2, где цифрами 1,2,3,4 отмечены линии, соответствующие $yh^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$. С ростом y (увеличением глубины частицы в слое) уменьшается скорость движения, но возрастает амплитуда ее колебаний. У

поверхности решета ($y \rightarrow h$) в некоторые моменты времени появляются обратные токи, характеризующиеся отрицательным значением скорости.

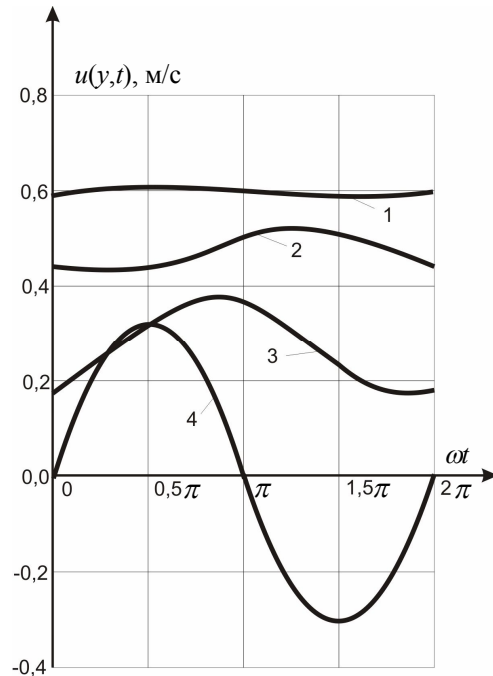


Рис. 2. Графики $u(y,t)$, полученные при $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$

Результаты аналогичных расчетов при $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$ представлены графически на рисунке 3. Здесь также соблюдаются отмеченные выше закономерности течения смеси. Поскольку в этом режиме колебаний уменьшился коэффициент вибровязкости смеси, то по сравнению с предыдущим режимом колебаний заметно возросли скорости течения ее верхних слоев и увеличилось затухание колебаний скоростей по мере приближения к верхней (свободной) границе.

На поверхности $y = 0$ колебания скорости потока очень малы, что подтверждается данными таблицы 1, где указаны значения $u(0,t)$, вычисленные в различные моменты времени. В числителе записаны результаты расчета по формуле (16) при $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$, а знаменатели – при $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$.

Заметим, что к этим результатам приводит и более простая формула (18), так как для принятых исходных данных $z \gg 1$.