**VII. АВТОМАТИЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

УДК 681.5 (075.32)

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПІДГОТОВКИ СУЧАСНИХ  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ**

**Дубчак Віктор Миколайович**, к.т.н., доц.  
Вінницький національний аграрний університет

**V. Dubchak**, PhD, Associate Professor,  
Vinnytsia National Agrarian University

*В роботі пропонується методика розв'язання прикладних задач для підготовки технологічних процесів механічної обробки на верстатах з числовим програмним керуванням (ЧПК) профільних поверхонь різного типу з метою забезпечення їх подальшого точного сполучення. Зокрема, досліджується питання оптимального покриття профілем «рівносторонній трикутник» профілю «круг» зі спільним центром вказаних профілів. Дані задачі є актуальними під час обробки деталей роторно-поршневих двигунів внутрішнього згоряння, деталей профільних з'єднань з рівновісним контуром та в інших схожих технологіях. В роботі отримано значення функції, що визначає різницю площ, по якій дані профілі не співпадають, проведено дослідження функції на екстремальність, встановлено дві точки її екстремуму в області визначення, показано, що в одній з цих точок функція набуває мінімального, а в іншій – максимального значень. Встановлені умови такого екстремального покриття одного профілю відповідно іншим профілем, приведено рисунки для постановки та рішення поставленої задачі, зроблено висновки.*

*Ключові слова: автоматизація, технологічний процес, механічна обробка, площа круга, площа рівностороннього трикутника, екстремальність функції.*

Ф. 15. Рис. 2. Літ. 11.

---

**1. Постановка проблеми**

Актуальною як з точки зору теорії так із ряду конкретних практичних застосувань є задача екстремального (мінімального та максимального) покриття однієї плоскої геометричної фігури іншою [1 – 8], зокрема, покриття площею круга площі іншої за геометрією фігури, такої як рівносторонній трикутник (рис. 1). Подібні задачі розв'язуються у процесі підготовки механічної обробки на верстатах з ЧПК виконавчих елементів роторно-поршневих двигунів внутрішнього згоряння [9], а також деталей профільних з'єднань з рівновісним контуром [10]. В якості основного критерію такого ефективного покриття однієї фігури іншою логічно пропонується обрати такий показник як значення екстремальної площі [1, 2, 6], по якій вказані геометричні фігури не співпадають. Встановленню таких екстремальних значень деякого аргументу в межах області визначення функції, по якій вказані фігури не співпадатимуть, присвячені дослідження даної роботи.

---

**2. Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Пошуку та дослідженню екстремальних значень певних математичних функцій однієї чи декількох змінних, що визначаються умовами конкретних задач, присвячені роботи [2 – 6], такі дослідження пропонуються в техніці, зокрема, в енергетичних [7], економічних [8, 11] роботах.

Результати даної роботи є логічним продовженням досліджень, проведених автором в роботі [1], в якій розглянуто оптимальне взаємне розташування заданих геометричних фігур, загальна площа, по якій ці фігури не співпадають, оптимізується.

---

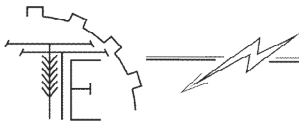
**3. Мета досліджень**

Основною метою проведених в роботі досліджень за допомогою апарату диференціального числення це встановлення певних геометричних умов, при яких загальна площа, по якій не співпадають площа круга з площею рівностороннього трикутника зі спільним центром.

---

**4. Основні результати досліджень.**

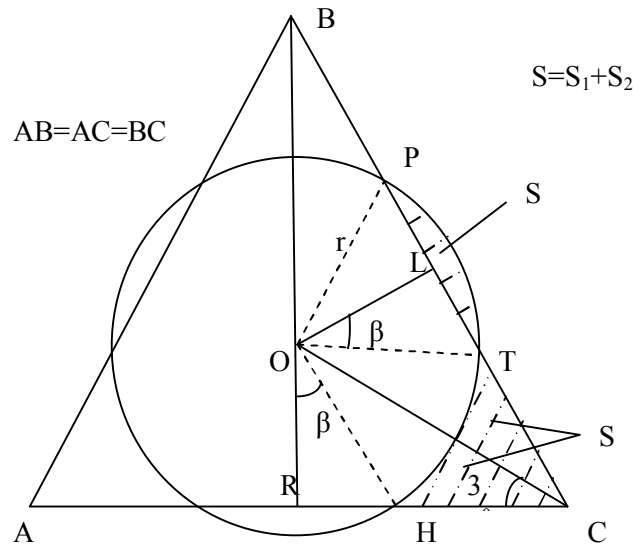
Нехай маємо рівносторонній трикутник  $ABC$  зі стороною  $a$ , площу якого покриває інша площа, а саме, площа круга радіуса  $r$  зі спільним центром цих двох фігур (рис. 1).



Маємо  $OH=OT=OP=r$ ,  $AB=AC=BC=a$ . Точки  $H, T, P$  можуть змінюватись в залежності від зміни радіуса самого кола або від зміни довжини сторони рівностороннього трикутника. Тому кут  $\beta$ , а це кут між катетом  $OR$  та гіпотенузою  $OH$  прямокутного трикутника  $ORH$  теж буде величиною змінною. Очевидні з рисунка межі, в яких можлива зміна вказаного кута  $\beta$ , а саме:  $0 < \beta < 60^\circ$ , оскільки кут  $ROH=60^\circ$ .

В введених позначеннях мають місце очевидні тригонометричні співвідношення:

$$\cos \beta = \frac{a\sqrt{3}}{6r} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cos \beta = 2\sqrt{3} \cos \beta. \quad (1)$$



**Рис. 1. Рівносторонній трикутник  $ABC$  зі стороною  $a$ , площу якого покриває площа круга радіуса  $r$  зі спільним центром**

В якості частини площі, по якій не співпадають вказані геометричні фігури, як це показано на рисунку, прийемо площу  $S=S_1+S_2$ . Тоді, очевидно, вся сумарна площа, по якій фігури не співпадатимуть, буде дорівнювати  $3 \cdot S$ . Для складових доданків шуканої площі з використанням відповідних геометричних формул маємо наступні рівності

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2(2\beta) - \frac{1}{2}OL \cdot TP = r^2\beta - \frac{a\sqrt{3}}{12}(a - 4r \sin(60^\circ - \beta)). \quad (2)$$

$$S_2 = 2\left(\frac{1}{2}OC \cdot HC \sin 30^\circ - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}ar \sin(60^\circ - \beta) - r^2 \frac{\pi}{3} + r^2\beta. \quad (3)$$

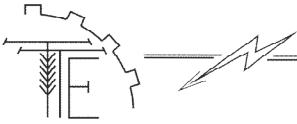
Таким чином сумарна площа набуде значення

$$S = S_1 + S_2 = r^2\beta - \frac{a\sqrt{3}}{12}(a - 4r \sin(60^\circ - \beta)) + \frac{2\sqrt{3}}{3}ar \sin(60^\circ - \beta) - r^2 \frac{\pi}{3} + r^2\beta = 2r^2\beta - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} + \sqrt{3}ar \sin(60^\circ - \beta) - r^2 \frac{\pi}{3}. \quad (4)$$

Провівши в останній рівності тотожні алгебраїчні перетворення з використанням співвідношення (1), отримаємо остаточний для подальшого дослідження вигляд функції змінної площі  $S$  за допомогою формули (5):

$$S = r^2 \left(2\beta - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \sqrt{3} \frac{a}{r} \sin(60^\circ - \beta) - \frac{\pi}{3}\right) = r^2 \left(2\beta - \frac{\sqrt{3}}{12} (2\sqrt{3} \cos \beta)^2 + \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} \cos \beta) \sin(60^\circ - \beta) - \frac{\pi}{3}\right) = r^2 \left(2\beta + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \cos 2\beta - \frac{3}{2} \sin 2\beta\right). \quad (5)$$

В цьому останньому співвідношенні (5) маємо запис функції  $S$ , залежної від аргументу  $\beta$ . Таким чином, залишається дослідити на існування екстремальних значень отриману функцію.



Тому спочатку знайдемо значення першої похідної отриманої функції по її аргументу  $\beta$  і прирівняємо значення цієї похідної до нуля:

$$S'_\beta = r^2(2 - 2\sqrt{3}\sin 2\beta - 3\cos 2\beta) = 0. \quad (6)$$

З отриманого рівняння (6) маємо наступну рівність відносно невідомого аргументу  $\beta$

$$4\sqrt{3}\sin\beta\cos\beta + 3\cos^2\beta - 3\sin^2\beta - 2\sin^2\beta - 2\cos^2\beta = 0. \quad (7)$$

Використовуючи відомі тригонометричні перетворення, рівність (7) трансформується в наступну

$$5tg^2\beta - 4\sqrt{3}tg\beta - 1 = 0 \quad (8)$$

Рішимо отримане квадратне рівняння відносно  $tg\beta$ :

Маємо  $D = 2\sqrt{17} > 0$ . Тоді невідомі рішення рівняння (8) будуть наступними

$$(tg\beta)_1 = \frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5},$$

$$(tg\beta)_2 = \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{5}.$$

Оскільки  $tg60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73$ , тому ці обидва значення будуть входити до області можливих значень  $\beta$ .

Характер найдених можливих екстремальних значень кута  $\beta$  встановимо за допомогою пошуку та дослідження другої похідної функції  $S$ . Маємо

$$\begin{aligned} S''_{\beta\beta} &= r^2(-4\sqrt{3}\cos 2\beta + 6\sin 2\beta) = r^2(12\sin\beta\cos\beta - 4\sqrt{3}\cos^2\beta + 4\sqrt{3}\sin^2\beta) = \\ &= \frac{r^2}{\cos^2\beta}(\sqrt{3}tg^2\beta + 3tg\beta - \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (9)$$

Знайдемо знаки похідної другого порядку в обох точках  $\beta_{1,2}$  можливого екстремуму досліджуваної функції

$$S''_{\beta\beta}((tg\beta)_1) = \frac{4r^2}{\cos^2\beta}(\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}\right) - \sqrt{3}) < 0, \quad (10)$$

$$S''_{\beta\beta}((tg\beta)_2) = \frac{4r^2}{\cos^2\beta}(\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{5}\right) - \sqrt{3}) > 0. \quad (11)$$

Оскільки значення другої похідної функції  $S$  в точці  $\beta_1$  набуває від'ємних значень, тому в цій точці сама функція  $S$  приймає найменшого із своїх можливих значень, в точці  $\beta_2$  – друга похідна додатна, тому в цій точці функція  $S$  приймає найбільшого із можливих своїх значень (рис. 2). Ще раз зауважимо, що  $0 < \beta_{1,2} < 60^\circ$ .

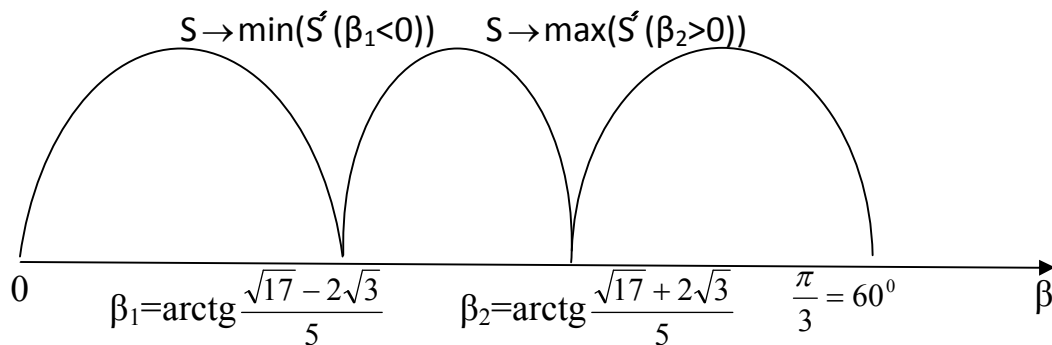


Рис. 2. Дослідження характеру екстремальних значень кута  $\beta$  за результатами другої похідної функції  $S$

Встановлюючи відношення параметрів характеристик сторони рівностороннього трикутника  $a$  та радіусу кола  $r$ , то дане відношення в кожній з екстремальних точок буде наступним:



$$\frac{a}{r} = 2\sqrt{3} \cos \beta \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \beta_1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}\right)^2}}, \quad (12)$$

при цьому  $S \rightarrow \min$ , і відношення

$$\frac{a}{r} = 2\sqrt{3} \cos \beta \Big|_{\beta=\beta_2} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \beta_2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{5}\right)^2}}, \quad (13)$$

при цьому  $S \rightarrow \max$ .

Вся сумарна площа, по якій не співпадатимуть площі розглянутих у даній роботі фігур, буде в тричі більшою. Для встановлення чисельних значень відповідно найменшої та найбільшої таких площ в кожному з знайдених екстремальних значень кута  $\beta$  для спрощень введемо позначення

$$N_1 = \frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}, \quad N_2 = \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{5}.$$

Тоді стосовно кута  $\beta = \beta_1$  з використанням рівності (11) маємо

$$\cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + N_1^2}}, \quad \sin \beta_1 = \frac{N_1}{\sqrt{1 + N_1^2}},$$

і тоді вся сумарна найменша площа з урахуванням результату (5) набуде вигляду:

$$S_{\min} = 3S(\beta_1) = 3r^2 \left( 2\arctg N_1 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \left( \frac{1}{1 + N_1^2} - \frac{2N_1}{1 + N_1^2} \right) - \frac{3}{2} \cdot 2 \frac{N_1}{\sqrt{1 + N_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + N_1^2}} \right) = 3r^2 \left( 2\arctg N_1 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{1 + N_1^2} - (3 + 2\sqrt{3}) \frac{N_1}{1 + N_1^2} \right). \quad (14)$$

Аналогічно при значенні  $\beta = \beta_2$  і

$$\cos \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + N_2^2}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{N_2}{\sqrt{1 + N_2^2}},$$

тоді маємо повну сумарну з урахуванням результату (5) найбільшу площу

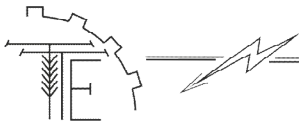
$$S_{\max} = 3S(\beta_2) = 3r^2 \left( 2\arctg N_2 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \left( \frac{1}{1 + N_2^2} - \frac{2N_2}{1 + N_2^2} \right) - \frac{3}{2} \cdot 2 \frac{N_2}{\sqrt{1 + N_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + N_2^2}} \right) = 3r^2 \left( 2\arctg N_2 + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{1 + N_2^2} - (3 + 2\sqrt{3}) \frac{N_2}{1 + N_2^2} \right). \quad (15)$$

Використовуючи рівність (1), можемо рівності (14) та (15) записати в еквівалентній формі через застосування довжини сторони  $a$  рівностороннього трикутника.

## 5. Висновки

1. Розглянуто питання щодо встановлення утворення екстремальної площі, по якій не співпадають профілі типу «круг» та «рівносторонній трикутник» зі спільним для них центром. Отримані значення відношень довжини сторони рівностороннього трикутника до величини радіуса круга, при яких утворюється відповідно мінімальне або максимальне значення вказаної площі.

2. Результати проведених досліджень пошуку умов екстремальної різниці площі покриття однієї плоскої геометричної фігури як то площі рівностороннього трикутника площею круга можуть знайти застосування під час підготовки механічної обробки на верстатах з ЧПК виконавчих елементів роторно-поршневих ДВЗ, під час виготовлення деталей профільних з'єднань з рівновісним контуром,



у системах технічного зору, навігаційних та кореляційних приладах, задачах ефективного застосування площ сільськогосподарських угідь, тощо.

#### Список літератури

1. Дубчак В. М. Встановлення умов ефективного покриття площею круга площі квадрата та деякі випадки узагальнення / В. М. Дубчак // Вібрації в техніці та технологіях, 2018. – №4 (91). – С. 15 – 20.
2. Ахтершев С. П. Задачи на максимум и минимум / С. П. Ахтершев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.
3. Беляева Э. С. Экстремальные задачи / Э. С. Беляева, В. М. Монахов. – М.: Просвещение, 1977. – 64 с.
4. Габасов Р. Ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях / Р. Ф. Габасов // Соросский образовательный журнал, 1997. – №6. – С. 115 – 120.
5. Галеев Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач. Учеб. пособие / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 203 с.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 2002. – 415 с.
7. Матвійчук В. А. Використання локальних джерел електроенергії для оптимізації структури ЕЕС / В. А. Матвійчук, О. О. Рубаненко, Н. В. Собчук // Вісник Хмельницького національного ун-ту, серія: Технічні науки, 2018. - №4. – С. 98 – 101.
8. Прямухіна Н. В. Теоретико-методологічні засади розвитку регіонального економічного простору в умовах трансформаційних зрушень / Н. В. Прямухіна. Автореф. дис.... д-ра екон. наук : Спеціальність – 08 00. 05. Східноукр. нац. ун-т ім. Володимира Даля. – Сєверодонецьк, 2016. – 36 с.
9. Колчин А. И. Расчет автомобильных и тракторных двигателей / А. И. Колчин, В. П. Демидов. - М.: Высш. шк., 2002. – 496 с.
10. Бочков В. М. Розрахунок та конструювання металорізальних верстатів / В. М. Бочков, Р. І. Сілін, О. В. Гаврильченко. – Львів: Видавництво «Бескід Біт», 2008. – 448 с.
11. Буреннікова Н. В. Результативність функціонування складних економічних систем аграрного спрямування. Монографія / Н. В. Буреннікова, В. О. Ярмоленко. – Вінниця: ВНАУ, 2017. – 168 с.

#### References

- [1] Dubchak, V. (2018) *Vstanovlennia umov efektyvnoho pokryttia ploshcheiu kruha ploshchi kvadrata ta deiaki vypadky uzahalnennia* [Establishing the conditions for effective coverage with the area of the square of the square and some cases of generalization], 4 (91), 15 – 20, *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh* [in Ukrainian].
- [2] Akhtershev, S. (2005) *Zadachy na maksymum y mynymum* [Tasks for maximum and minimum] St. Petersburg : BHV-Petersburg [in Russian].
- [3] Belyaeva, E. (1977) *Ekstremalnye zadachy* [Extreme tasks] Moscow: Prosveshchenye [in Russian].
- [4] Gabasov, R. (1997) *Ekstremalnye zadachy v sovremennoi nauke y prylozheniyakh* [Extreme problems in modern science and applications], 6, 115 – 120, *Sorovskiy obrazovatelnyy zhurnal* [in Russian].
- [5] Galeev, E., Tikhomirov, V. (1989) *Kratkiy kurs teoryy ekstremalnykh zadach* [Brief course of the theory of extreme problems] Moscow: Yzd-vo MHU [in Russian].
- [6] Vasiliev, F. (2002) *Chyselni metody rozv'iazannia ekstremalnykh zadach* [Numerical methods for solving extreme problems] Moscow: Nauka [in Russian].
- [7] Matviichuk, V., Rubanenko, O., Sobchuk, N. (2018) *Use of local power sources to optimize the EES structure* [Use of local power sources to optimize the structure of a unified energy system], 4, 98 – 101, *Bulletin of the Khmelnytsky National Unitary Enterprise, series: Engineering* [in Ukrainian].
- [8] Prymukhina, N. (2016) *Teoretyko-metodolohichni zasady rozvytku rehionalnoho ekonomichnoho prostoru v umovakh transformatsiynykh zrushen* [Theoretical and methodological principles of development of the regional economic space in conditions of transformational changes] Severodonetsk: East Ukrainian National University by Name of Volodymyr Dahl [in Ukrainian].
- [9] Kolchyn, A., Demydov, V. (2002) *Raschet avtomobylnykh y traktornykh dvyhateley* [Calculation of automobile and tractor engines] Moscow: Vysshaya shkol'f [in Russian].





- [10] Bochkov, V., Silin, R., Havrylchenko, O. (2008) *Rozrakhunok ta konstruyuvannya metalorizalnykh verstativ [Calculation and design of metal-cutting machine tools]* Lviv: Vydavnytstvo «Beskid Bit» [in Ukrainian].
- [11] Burennikova, N., Yarmolenko, V. (2017) *Rezultatyvnist funktsionuvannya skladnykh ekonomichnykh system ahrarnoho spryamyvannya [Effect of functioning of complex economic systems of agrarian direction]* / Vinnytsia: VNAU [in Ukrainian].

#### РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗАЦИИ ПОДГОТОВКИ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

*В работе предлагается методика решения прикладных задач для подготовки технологических процессов механической обработки на станках с числовым программным управлением (ЧПУ) профильных поверхностей разного типа с целью обеспечения их дальнейшего точного соединения. В частности, исследуется вопрос оптимального покрытия профилем «равносторонний треугольник» профиля «круг» с общим центром указанных профилей. Данные задачи актуальны при обработке деталей роторно-поршневых ДВС и деталей профильных соединений с равноосным контуром. В работе получено значение функции, определяющей разницу площадей, по которой данные профили не совпадают, проведено исследование функции на экстремальность, установлены две точки ее экстремума в области определения. Установлены условия такого экстремального покрытия одного профиля другим профилем, приведены рисунки для постановки и решения поставленной задачи, сделаны выводы.*

*Ключевые слова: автоматизация, технологический процесс, механическая обработка, площадь круга, площадь равностороннего треугольника, экстремальность функции.*

Ф. 15. Рис. 2. Лит. 11.

#### SOLVING APPLIED PROBLEMS OF AUTOMATING THE PREPARATION OF MODERN TECHNOLOGICAL PROCESSES OF MECHANICAL PROCESSING

*The article proposes a technique for solving applied problems for the preparation of technological processes of mechanical processing on machine tools with numerical programmed control (CNC) of different types of profiled surfaces with the aim of ensuring their further precise connection. In particular, the question of the optimal coverage of the “circle” profile with the common center of these profiles by the “equilateral triangle” profile is investigated. These tasks are relevant in the processing of parts of rotary-piston internal combustion engines, parts of profile joints with equiaxial contour and in other similar technologies. In the work, the value of the function determining the difference of areas, according to which these profiles do not coincide, was obtained, the function was investigated for extremality, two points of its extremum were determined in the domain of definition, it was shown that at one of these points the function acquires a minimum. The conditions for such an extremal coverage of one profile in accordance with another profile are established, figures are given for the formulation and solution of the problem, conclusions are made.*

*Keywords: automation, technological process, mechanical processing, area of a circle, area of an equilateral triangle, extremality of a function.*

F. 15. Fig. 2. Ref. 11.

#### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

**Дубчак Віктор Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Математики, фізики та комп'ютерних технологій» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, email: viktor\_dubchak@rambler.ru).

**Дубчак Виктор Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Математики, физики и компьютерных технологий» Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, email: viktor\_dubchak@rambler.ru)

**Dubchak Viktor Nikolaevich** – PhD, Associate Professor of “Department of Mathematics, Physics and Computer Technologies” of Vinnytsia National Agrarian University (21008, Vinnytsia, 3, Solyaschyna St., email: viktor\_dubchak@rambler.ru).