№ 4 (99)

2017

Техніка, енергетика, транспорт АПК

УДК 532.11

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЕННЯ СИЛИ ТИСКУ НА ПОВЕРХНЮ КУЛІ ТА ЇЇ ЧАСТИНИ

Дубчак Віктор Миколайович, *к.т.н., доцент*
Вінницький національний аграрний університет
Dubchak V.
Vinnytsia National Agrarian University

Анотація: *в даній роботі на базі відомого фізичного закону Паскаля приведені та встановлені результати обчислення сили тиску з боку рідини відомої питомої ваги на всю поверхню кулі та її півкулі: з горизонтально розташованою її основою (при цьому в одному випадку поверхня півкулі знаходиться над основою,а в іншому випадку-під основою), а також у випадку, коли основа півкулі розташована вертикально,зроблено висновки про те, що встановлене значення сили тиску на поверхню всієї кулі пропорційне кубу радіуса даної кулі, при цьому сила тиску на нижню півкулю є втричі більшою за силу тиску на верхню півкулю даної кулі.*

Ключові слова: *обчислення сили тиску, закон Паскаля,. сила тиску на поверхню кулі та на поверхні півкуль з горизонтально або вертикально розташованими їх основами.*

Вступ

Актуальною прикладною задачею в сучасних науково-технічних дослідженнях є можливість вимірювання та обчислення величини сили тиску з боку довільної рідини на занурене в неї тіло з заданою геометрією поверхні цього тіла. Щодо теоретичних можливостей рішення такої задачі, то тут є корисним застосування відомого фізичного закону Паскаля, згідно якого сила тиску P обчислюється за формулою: $P = \rho y S$, де ρ – питома вага рідини, h – глибина занурення деякої площадки площі S даного тіла в цю рідину [1, 2]. Слід зауважити, що безпосередньо в такому вигляді формула обчислення сили тиску може бути використана тільки для горизонтально орієнтованих занурених в рідину площадок, а якщо занурена поверхня сформована за участі вертикальної складової, тоді сила тиску на таку поверхню з боку рідини буде диференційованою і змінюватиметься в залежності від глибини занурення частин такої площадки згідно все того ж закону Паскаля (лінійна залежність зміни сили тиску P від глибини занурення h) [3, 4].

Постановка задачі

В матеріалах даних досліджень за допомогою математичного апарату розглядається можливість аналітичного обчислення сили тиску на занурену в рідину кулю заданого радіуса, а також на її півкулі з різною просторовою орієнтацією в середині рідини.

.

Результати досліджень

На рис. 1 в осях xoy зображено осьовий переріз такої кулі радіуса R, горизонтальна пряма $y = 2R - h$ визначає верхню межу занурення даної півкулі в рідину (h – глибина занурення), ΔS - довільно взята елементарна площа висоти ΔS, тут Δl – елемент дуги, r – радіус виділеного кульового поясу.

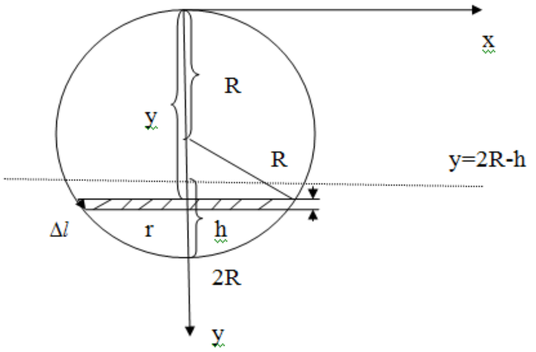

Рис. 1. Осьовий переріз кулі радіуса R в осях xoy

З геометричних співвідношень маємо:

$$r = \sqrt{R^2 - (y-R)^2} = \sqrt{2Ry - y^2}\ ,\ y \in \left[2R - h; 2\mathrm{R}\right]. \tag{1}$$

За законом Паскаля величина елементарної сили тиску ΔP на виділену елементарну площадку ΔS визначається наступним чином:

$$\Delta P \approx \rho y \Delta S, \tag{2}$$

$$\Delta S \approx 2\pi r \Delta l = 2\pi \sqrt{2Ry - y^2}\,\frac{R\Delta y}{\sqrt{2Ry - y^2}} = 2\pi R \Delta y,$$

$$\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (x_y^{'})^2}\,\Delta y = \sqrt{1 + \frac{(y-R)^2}{2Ry - y^2}}\,\Delta y = \sqrt{1 + \frac{y^2 - 2Ry + R^2}{2Ry - y^2}}\,\Delta y = \frac{R\Delta y}{\sqrt{2Ry - y^2}}.$$

Після спрощень та скорочень отримаємо:

$$\Delta P \approx 2\pi\rho R y \Delta y,\ y \in \left[2R - h; 2\mathrm{R}\right]. \tag{3}$$

Таким чином, величина сумарної сили тиску P може бути знайдена так:

$$P = 2\pi\rho R \int_{2R-h}^{2R} y\,dy = \pi\rho R y^2 \Big|_{2R-h}^{2R} = \pi\rho R(4Rh - h^2). \tag{4}$$

Якщо $h = 2R$ (куля повністю занурена в рідину і її поверхня дотикається даної кулі), тоді сила тиску визначається як:

$$P = \pi\rho \mathrm{R}(8\mathrm{R}^2 - 4\mathrm{R}^2) = 4\pi\rho R^3. \tag{5}$$

Якщо $h = 2R$ (куля наполовину занурена в рідину (рис. 2), тобто під її дією знаходиться нижня частина кулі), то сила тиску дорівнює $P = \pi\rho \mathrm{R}(8\mathrm{R}^2 - 4\mathrm{R}^2) = 4\pi\rho R^3$. Такою є сила тиску з боку рідини на нижню півкулю з горизонтально розташованою її основою на глибині R. При цьому повна сила тиску P_1^* на всю нижню півкулю з урахуванням сили тиску на горизонтально розташовану основу цієї півкулі на глибині R, визначається як:

$$P_1^* = 3\pi\rho R^3 + \rho R S = 3\pi\rho R^3 + \pi\rho R^3 = 4\pi\rho R^3, \tag{6}$$

де S – площа кругової основи даної півкулі радіуса R.

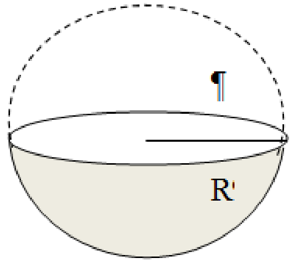

Рис. 2. Нижня півкуля радіуса R

Відповідно, величина сили тиску на верхню половину кулі (рис. 3) визначається як:

$$P_2 = 2\pi\rho R \int_0^R y\,dy = \pi\rho R y^2 \Big|_0^R = \pi\rho R^3 \tag{7}$$

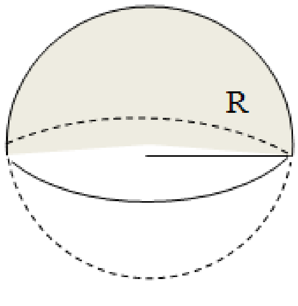

Рис. 3. Верхня півкуля радіуса R

Повна сила тиску P_2^* складається із сили тиску P_2 на верхню частину кулі плюс сила тиску на горизонтально розташовану основу цієї півкулі, яка розташована на глибині R, і ця сила дорівнює $\pi\rho R^3$. Тому $P_2^* = \pi\rho R^3 + \pi\rho R^3 = 2\pi\rho R^3$. Маємо співвідношення $P_1^* / P_2^* = 2$. Також, очевидно, що $P = P_1 + P_2$, $P_1 / P_2 = 3$.

Можемо встановити величину сили тиску з боку рідини на всю поверхню півкулі з вертикально розташованою її основою (рис. 4), при цьому, очевидно, що сили тиску на праву та ліву поверхні півкуль співпадатимуть.

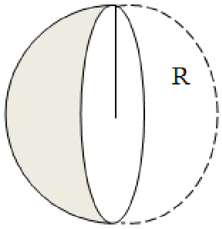

Рис. 4. Бічна (права або ліва) півкуля радіуса R

Сила тиску P_3, власне, на поверхню такої півкулі визначається так:

$$P_3 = \pi\rho R \int_0^{2R} y dy = \frac{1}{2}\pi\rho R y^2 \Big|_0^{2R} = 2\pi\rho R^3 \quad (8)$$

Маємо $P = 2P_3$.

Сила тиску P_3^* на всю поверхню півкулі з вертикально розташованою її основою складається з сили тиску P_3 плюс сила тиску P^*, що діє на вертикальну основу такої півкулі, для обчислення сили тиску на яку, маємо (рис. 5):

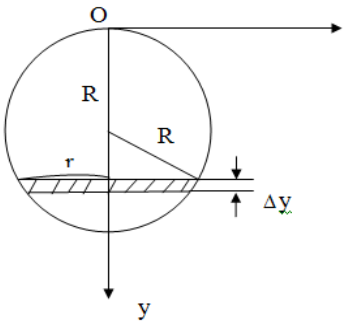

Рис. 5. Вертикальна кругова основа півкулі радіуса R

$$r^2 + (y-R)^2 = R^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - (y-R)^2}, \quad (9)$$

$$\Delta P \approx \rho y \Delta S \approx 2\rho r y \Delta y \approx 2\rho y \sqrt{R^2 - (y-R)^2}\,\Delta y, y \in [0, 2R], \quad (10)$$

$$P^* = 2\rho \int_0^{2R} y\sqrt{R^2 - (y-R)^2} dy = \left\{ \begin{aligned} & t = y - R \\ & y = t + R \\ & y = 2R \Rightarrow t = R \\ & y = 0 \Rightarrow t = -R \end{aligned} \right\} = 2\rho \int_{-R}^{R} (t+R)\sqrt{R^2 - t^2} dt =$$

$$= 2\rho \int_{-R}^{R} t\sqrt{R^2 - t^2} dt + 2\rho R \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2} dt = 4\rho R \int_0^R \sqrt{R^2 - t^2} dt = \quad , (11)$$

$$= 4\rho R \left[\frac{t\sqrt{R^2 - t^2}}{2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{t}{R} \right] \Bigg|_0^R = 2\rho R^3 (\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\rho R^3 (\frac{\pi}{2}) = \pi\rho R^3$$

Таким чином, маємо:

$$P_3^* = P_3 + P^* = 3\pi\rho R^3 . \quad (12)$$

На рис. 6 приведено узагальнену модель знаходження сили тиску на поверхню даної кулі, яка занурена в рідину на довільно взяту глибину $y \in [H, H + 2R]$.

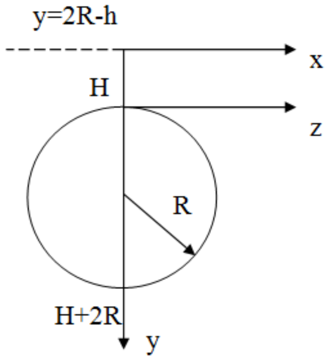

Рис. 6. Осьовий переріз кулі радіуса R, розташованої на довільній глибині рідини

В цьому випадку сила тиску з боку рідини визначається наступним чином:

$$P = 2\pi\rho R \int_{H}^{H+2R} y dy = 2\pi\rho R \int_{0}^{2R} (z + H) dz = 4\pi\rho R^2 (H + R) . \qquad (13)$$

Висновки

Даними дослідженнями показано, що величина сили тиску (вимірюється в Ньютонах) з боку рідини на поверхню всієї кулі радіуса R або її півкуль завжди буде пропорційною кубу радіуса цієї кулі. Аналітично встановлено точні числові величини відповідних значень такої сили тиску. Враховано і обчислено значення сили тиску на повну поверхню геометрично по різному орієнтованих півкуль як окремих фізичних тіл. При необхідності можливо знаходити числові значення відповідних величин, власне, тиску (вимірюється в Паскалях), відносячи найдені величини сили тиску до відповідної площі поверхні, на яку дана сила тиску діє. Аналогічними підходами та розрахунками можливо обчислювати величину сили тиску на поверхні інших відомих геометричних фігур з різною просторою орієнтацією, таких, наприклад, як поверхня циліндра, конуса, тощо.

Список літератури

1. Ландау Л Д., Лифшиц Е. М. Механика. – Издание 5-е, стереотипное. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с. — («Теоретическая физика», том I). – ISBN 5-9221-0055-6.

2. Мултановский В. В. Курс теоретической физики. Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика. — М.: Просвещение, 1988.

3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Б.П.Демидовича. – М.: Наука,1972.

5. Дубчак В.М. Математичні моделі порівняння енергетичних характеристик в одній прикладній задачі. – Вінниця, ВНАУ, Збірник наукових праць "Техніка, енергетика, транспорт АПК", 2016 р., №3(95), с.151-155.

6. Дубчак В.М.,Новицька Л.І. Методика порівняння деяких енергетичних характеристик в симетричних задачах. – Вінниця, ВНАУ, Збірник наукових праць "Техніка, енергетика, транспорт АПК", 2015, №1(91), с.112-114.

References

1. Landau L. D., Lifshits E. M. Mehanika. – Izdanie 5-e, stereotipnoe. – M.: Fizmatlit, 2004. – 224 s. – («Teoreticheskaya fizika», tom I). – ISBN 5-9221-0055-6.

2. Multanovskiy V. V. Kurs teoreticheskoy fiziki. Klassicheskaya mehanika. Osnovyi spetsialnoy teorii otnositelnosti. Relyativistskaya mehanika. — M.: Prosveschenie, 1988.

3. Vyigodskiy M.Ya. Spravochnik po elementarnoy matematike. – M.: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literaturyi, 1959.

4. Zadachi i uprazhneniya po matematicheskomu analizu. Pod redaktsiey B.P.Demidovicha. – M.: Nauka,1972.

5. Dubchak V.M. MatematichnI modelI porIvnyannya energetichnih harakteristik v odnIy prikladnIy zadachI. – VInnitsya, VNAU, ZbIrnik naukovih prats «TehnIka, energetika, transport APK», 2016 r., #3(95), s.151-155.

6. Dubchak V.M.,Novitska L.I. Metodika porIvnyannya deyakih energetichnih harakteristik v simetrichnih zadachah. – VInnitsya, VNAU, ZbIrnik naukovih prats «TehnIka, energetika, transport APK», 2015, #1(91), s.112-114.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСЧИСЛЕНИЯ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Аннотация: *в данной работе на базе известного физического закона Паскаля приведены и установлены результаты вычисления силы давления со стороны жидкости известной удельного веса по всей поверхности шара и его полушария: с горизонтально расположенной ее основой (при этом в одном случае поверхность полушария находится над основанием, а в противном случае-под основанием), а также в случае, когда основа полушария расположена вертикально, сделаны выводы о том, что установленное значение силы давления на поверхность всей шара пропорциональное кубу радиуса данной шара, при этом сила давления н а нижнюю полушарие втрое большей силу давления на верхнюю полушарие данной шара.*

Ключевые слова: *вычисление силы давления, закон Паскаля ,. сила давления на поверхность шара и на поверхности полушарий с горизонтально или вертикально расположенными их основаниями.*

MATHEMATICAL MODELING OF CALCULATION OF PRESSURE FORCE ON THE BOW SURFACE AND ITS PARTS

Abstract: *in this paper, based on the well-known physical law of Pascal, the results of calculating the force of pressure from a fluid of known specific gravity over the entire surface of the sphere and its hemisphere are shown and set: with its horizontally located base (in one case, the hemisphere surface is above the base, and otherwise, under the base), and also in the case when the hemisphere base is located vertically, it is concluded that the established value of the pressure force on the surface of the entire ball is proportional to the cube of the radius of the given sphere, with the pressure force on the lower hemisphere tripling the force of pressure on the upper hemisphere of the given sphere.*

Keywords: *pressure force calculation, Pascal 's law. force of pressure on the surface of the ball and on the surface of the hemispheres with horizontally or vertically arranged bases.*